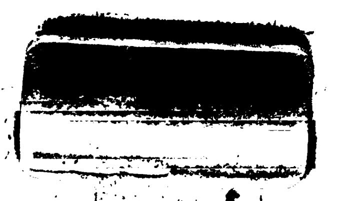
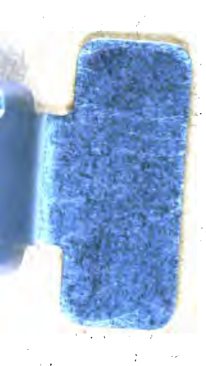
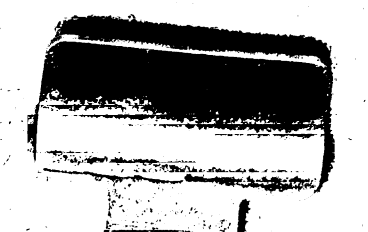








Theorie und Anwendungen

der

hyperbolischen Functionen,

vornehmlich

Bestimmung des Widerstandscoefficienten aus Fallversuchen.

(Aus den Schriften der Naturforschenden Gesellschaft zu Danzig für das Jahr 1865 besonders abgedruckt.)



Von

J. F. W. Gronau,

Professor und Oberlehrer an der Realschule zu St. Johann zu Danzig.

Danzig,

Druck von A. W. Kafemann.

1865.



§ 1.

Da man zur Zeit der Erfindung der Infinitesimalrechnung im vollständigen Besitze von cyklisch-trigonometrischen Tafeln und von Logarithmentafeln war, so lag es nahe, das von den unsterblichen Erfindern dieser Rechnung beobachtete Verfahren, die Integrationen gewisser Ausdrücke auf die Quadratur des Kreises und der Hyperbel zurückzuführen, so plastisch es in theoretischer Hinsicht war, aufzugeben und nach dem Vorgange von R. Cotes dafür der Praxis wegen diese Integrationen lieber durch die mit der Quadratur jener Curven in Beziehung stehenden Kreisbogen und Logarithmen zu vollziehen. Als aber Lambert an die Trigonometrie des Kreises die Trigonometrie der gleichseitigen Hyperbel angelehnt hatte, als an die cyklisch-trigonometrischen Tafeln Gudermann seine von ungewöhnlicher Ausdauer zeugenden hyperbolisch-trigonometrischen Tafeln angereiht hatte, da hätte man erwarten können, dass die meistens sehr unlogarithmische Integration vermittelst der Logarithmen Platz gemacht hätte der Integration durch trigonometrische Functionen der hyperbolischen Sektoren. Wenn das trotz alle dem bis jetzt nicht geschehen ist, so liegt der Grund davon wohl nur darin, dass es den Tafeln Gudermanns an Einheit und dessen Grundlegung für die Integrationen durch hyperbolisch-trigonometrische Functionen an Einfachheit fehlt. Dem ersten Uebelstande glaube ich durch meine 1863 herausgegebenen und in den Schriften der naturforschenden Gesellschaft zu Danzig befindlichen

Tafeln für sämmtliche trigonometrische Functionen der cyklischen und hyperbolischen Sektoren

abgeholfen zu haben und bin nun im Begriff, in möglichster Kürze eine fassliche Darlegung der Principien der Integration durch hyperbolische Functionen zu geben und dann Anwendungen folgen zu lassen, aus denen ersichtlich sein wird, dass jetzt die Integration durch Quadraturen des Kreises und der damit vereinigten Hyperbel weder in theoretischer noch in praktischer Beziehung etwas zu wünschen übrig lässt und es daher an der Zeit sein möchte, in den meisten Fällen die Integration durch Logarithmen aufzugeben.

§ 2.

In der Vorrede zum Programm der Realschule zu St. Johann von 1863: „Ueber die allgemeine und volle Gültigkeit der mathematischen Formeln II. Th. 1. Hft.“ pag. IV habe ich für die bekannte Relation zwischen dem hyperbolischen Sektor $BFC = S$ und der auf die Asymptote bezogenen Abscisse U, nämlich für die Gleichung $S = c^2 . Log\left(\frac{U}{c}\right)$, wo c^2 die Potenz der Hyperbel ist, einen sehr einfachen, Fig. 1.

elementaren Beweis gegeben und daraus pag. VII eben so einfach abgeleitet, dass $S = \frac{r^2}{2} . Log\left(\frac{CG}{r} + \frac{FG}{r}\right)$ ist, wo $r = CB$ der Radius des zur Hyperbel gehörigen Kreises ist, und CG und FG die Coordinaten des Grenzpunktes F sind. Nennt man $\frac{CG}{r} = \xi$ und $\frac{FG}{r} = \eta$, und nimmt die Gleichung der Hyperbel, nach welcher $\xi^2 - \eta^2 = (\xi + \eta) . (\xi - \eta) = 1$ ist, zu Hilfe, so erkennt man, dass die angegebene Relation zwischen dem Sektor und seinen Coordinaten folgende zwei Gleichungen umfasst:

$$S = \frac{r^2}{2} . Log . (\xi + \eta) \text{ und } S = \frac{r^2}{2} . Log\left(\frac{1}{\xi - \eta}\right).$$

Da sonach der Sektor von den Brüchen ξ und η abhängt und umgekehrt ξ und η vom Sektor abhängen, so kann man der Analogie mit dem Kreise gemäss ξ und η den Cosinus und Sinus des hyperbolischen Sektors nennen; nur wird man der Uebereinstimmung wegen gut thun, ähnliche Brüche beim Kreise, nicht, wie bisher, Cosinus und Sinus eines cyklischen Bogens, sondern des dazu gehörigen cyklischen Sektors zu nennen, was immer geschehen kann, da die Kreisbogen mit den Kreissektoren in demselben Verhältniss stehen. So wie nun die Grösse eines beliebigen Kreissektors JBC oder $s = \frac{r^2}{2} . \omega$ ist, wo ω, ein Theil von π, die Masszahl für den umspannenden Bogen JB im Vergleich zum Radius ist, so kann man auch den hyperbolischen Sektor $S = \frac{r^2}{2} . z$ setzen, wo also auch z eine Zahl ist, nämlich der natürliche Logarithme einer der beiden letzten Klammern. Darnach gehen die beiden letzten Gleichungen in folgende über: $z = Log\ (\xi + \eta)$ und $-z = Log\ (\xi - \eta)$ oder $e^z = \xi + \eta$ und $e^{-z} = \xi - \eta$, wo $\xi = Cos\ S$ und $\eta = Sin\ S$ ist. Da man aber berechtigt ist, als Flächenmass für die hyperbolischen Sektoren die Potenz der Hyperbel $\frac{r^2}{2}$ zu setzen*), so kann man auch ohne weiteres schreiben: $\xi = Cos\ z$, $\eta = Sin\ z$. In so fern es nun gewiss geeignet ist, für die beiden Theile Einer Kurve, ich meine für die Hyperbel und den davon unzertrennlichen Kreis (Programm 1863 pag. 35) Ein gemeinschaftliches Flächenmass anzuwenden, so wird es auch beim Kreise nicht nöthig sein von $cos\ s$ und $sin\ s$ zu sprechen, sondern von $cos\ \omega$ und $sin\ \omega$, so dass also unter z und ω Zahlen verstanden werden, welche die Grösse von hyperbolischen und cyklischen Flächen angeben.

Wenn die Anhänger des Alten sich unter ω nach wie vor Bogenlängen denken, und sie an passenden Stellen mit *arc.* bezeichnen wollen, so wird das, der obigen Darstellung nach, nichts schaden; wenn aber Gudermann auch die hyperbolischen z mit *Arc.* bezeichnet und Längezahlen nennt, so scheint mir unter dieser Analogisirung die Deutlichkeit zu leiden, da die z (seine k) eben nicht Längezahlen, sondern, wenn man will, Flächenzahlen sind. Ich werde daher lieber, an das Wort *Area* denkend, bei sich darbietender Gelegenheit die auf den Kreis zu beziehenden ω mit *ar.* und die auf die Hyperbel bezüglichen z mit *Ar.* bezeichnen.

*) Die Herren Professoren Forti und Mossotti in ihrem Werke Tavole dei logaritmi della funzioni circolari ed iperboliche, Pisa 1863, auf welches ich später noch zurückkomme, wählen dazu r^2, indem sie den Logarithmen der Klammer = *doppio settore imperbolico* = *2 sett h* setzen. Unser gemeinschaftlicher Führer, Lambert, (Berliner Memoiren von 1768 pag. 332 und 333) sagt über diesen Punkt folgendes: Quant à l'aire du secteur hyperbolique, il est assez indifférent de quelle unité l'on se sert pour l'exprimer . . . Cela fait que je regarderai cette aire comme exprimée par u (mein z).

§ 3.

Da die beiden letzten Gleichungen jetzt folgendermassen dargestellt werden können: $e^z = Cos\, z + Sin\, z$ und $e^{-z} = Cos\, z - Sin\, z$, so ergeben sie, dass

$$Cos\, z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 1 + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \frac{z^6}{1.2.3.4.5.6} + \dots \text{ und}$$

$$Sin\, z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = z + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} + \frac{z^7}{1.2.3.4.5.6.7} \dots \text{ ist.}$$

Bezeichnet u einen andern hyperbolischen Sector, so ist

$e^u = Cos\, u + Sin\, u$ und $e^{-u} = Cos\, u - Sin\, u$. Natürlich ist auch

$e^{z+u} = e^z . e^u = Cos\,(z+u) + Sin\,(z+u)$ und $e^{-(z+u)} = e^{-z} . e^{-u} = Cos\,(z+u) - Sin\,(z+u)$

Daraus schliesst man:

$Cos\,(z+u) = Cos\, z . Cos\, u + Sin\, z . Sin\, u$ und $Sin\,(z+u) = Sin\, z . Cos\, u + Cos\, z . Sin\, u.$

Ebenso würde man durch Benutzung der Ausdrücke e^{z-u} und $e^{-(z-u)}$ die entsprechenden Formeln für $Cos\,(z-u)$ und $Sin\,(z-u)$ erhalten. Nimmt man noch die Gleichung der Hyperbel: $Cos\, z^2 - Sin\, z^2 = 1$ hinzu, und setzt successive $z = u$, $2\,u$, $3\,u \dots$, so kann man sich nach Bedürfniss die Cosinus und Sinus der vielfachen Sektoren, und anderes hiemit in Verbindung stehendes verschaffen. Um mich hiebei nicht aufhalten zu dürfen, so verweise ich deswegen auf Gudermanns Theorie der Potenzialfunctionen pag. 33—38.

§ 4.

Nunmehr ziehe man das Loth HB, die Parallele FH und die Sekante CH, so wird man leicht zwischen dem hyperbolischen Sektor $BFC = z$ und dem davon abhängigen cyklischen Sektor $BJC = w$ folgende Beziehungen als richtig erkennen:

Da $FG = HB$ ist, so haben wir 1) $Sin\, z = tg\, \omega$,

weil ferner $CG = CH$, so ist . . 2) $Cos\, z = sec\, \omega$.

Die Beziehungen der übrigen vier trigonometrischen Functionen ergeben sich von selbst, ich schreibe daher nur noch hin 3) $Tg\, z = sin\, \omega$.

Wenn wir nun noch aus der obigen Gleichung $z = Log\,(Cos\, z + Sin\, z)$ durch einige leichte Rechnungen ableiten, dass 4) $z = Log\, tg\,(45^0 + \frac{1}{2}\,\omega)$ ist, so haben wir die wesentlichen Stücke beisammen, auf denen die Anfertigung von cyklisch-hyperbolischen Tafeln beruht, wie ich in meiner Abhandlung: „Auflösung der kubischen Gleichungen durch trigonometrische Functionen des Kreises und der Hyperbel, Neueste Schriften der naturforschenden Gesellschaft in Danzig, 1861, pag. 10 und 2ter und 3ter Anhang“ näher gezeigt und namentlich durch die Herausgabe meiner Tafeln von 1863 dargethan habe.

Lambert nennt das zu z gehörige ω den transcendenten Winkel, weshalb ihn Herr Prof. Forti in seinen schon erwähnten Tafeln mit τ bezeichnet, und Gudermann drückt die Zusammengehörigkeit von z und ω in folgender Weise aus: Stellt k irgend einen cyklischen Sektor vor, so bezeichnet er den ihm entsprechenden hyberbolischen Sektor durch Lk, wo für L Längezahl zu lesen ist; stellt dagegen k irgend einen hyperbolischen Sektor vor, so nennt er den ihm zukommenden cyklischen Sektor lk, wo l Longitudinalzahl bedeutet.

§ 5.

Ich will noch über den Winkel $FCB = \varphi$, den Lambert den gemeinschaftlichen Winkel nennt, einige Bemerkungen machen. Wie man sieht, ist

$tg\,\varphi = Tg\,z = t$. Da demnach $Sin\,z = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ und $Cos\,z = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ ist, so nimmt die obige Gleichung für z nach und nach folgende Gestalt an:

$$z = Log\frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}} = Log\sqrt{\frac{1+t}{1-t}} = \tfrac{1}{2}\,Log\,tg\,(45^0 + \varphi).$$

Man könnte sich also auch hyperbolische Tafeln construirt denken, denen das Argument φ zum Grunde läge. Aber einerseits würde die Anfertigung solcher Tafeln weit mühevoller sein, da man fast alle Columnen selbstständig berechnen müsste, andererseits würde hiebei eine Verschmelzung mit den cyklischen Tafeln, wie ich sie bei meinen Tafeln zu Wege gebracht habe, unmöglich sein, da $sin\,\varphi = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ und $cos\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ ist; man müsste neben den hyperbolischen Tafeln dann immer noch cyklische Tafeln zur Hand haben.

Lambert (pag. 333), nachdem er auseinandergesetzt hat, dass die neuen von ihm in Vorschlag gebrachten hyperbolischen Tafeln ausser 6 anderen Rubriken enthalten müssten: 7ne Colonne: *la tang* $\varphi = sin\,\omega$, 8ne Colonne: *le log tang* $\varphi = log\,sin\,\omega$, 9ne Colonne: l'angle φ répondant, spricht sich über den Winkel φ folgendermassen aus: Il n'y a donc que les trois dernieres colonnes qui ne se trouvent pas immédiatement dans les Tables, si on veut les réduire aux mêmes angles ω qu'on a mis pour base pour les colonnes précédentes. Mais, si pour ces trois dernieres colonnes on met pour base l'angle φ, ces trois colonnes se trouvent également toutes calculées; mais dans ce cas il faut y joindre une colonne qui donne pour chaque angle φ le secteur hyperbolique répondant $u\ (=z) = \tfrac{1}{2}\,Log\,tg\,(45 + \varphi)$ et cette colonne .. se trouve (presque aussi) dans les Tables. Je m'en tiendrai néanmoins au premier arrangement. Hiezu bemerke ich: 1) da $tg\,\varphi = sin\,\omega$ ist, so finden sich bei einer nach ω geordneten Tafel allerdings die 7te und 8te Rubrik unmittelbar in unsern alten Tafeln, und hätte man nur die 9te Rubrik besonders zu berechnen. 2) Weder Gudermann noch ich haben die Nothwendigkeit erkannt, in Tafeln, die nach dem Argument ω fortschreiten, eine solche Rubrik für φ anzubringen. 3) Ich kann mir nicht denken, dass Lambert durch die voranstehenden Worte hat auffordern wollen, Tafeln zu construiren, von denen ein Theil nach ω, und der andere Theil nach φ geordnet wäre. 4) Nichts desto weniger haben die oben erwähnten Tafeln der Herren Mossotti und Forti eine solche Einrichtung, und zwar giebt die eine Abtheilung derselben, die nach regelmässig fortschreitenden φ geordnet ist, die entsprechenden, natürlich irrationellen ω, und zu diesen ω die bezüglichen $log\,Cos\,z$, $log\,Sin\,z$ und $log\,z$; die andere Abtheilung, die regelmässig nach $\tfrac{1}{2}\,\omega$ fortschreitet, giebt die zu ω gehörigen z und $log\,tg\,\varphi = log\,Tg\,z$. Man könnte eine kurze Charakteristik der Fortischen Tafeln auch in folgenden Worten geben: Seine beiden Tafeln schreiten nach dem Argumente ω fort, aber die erste nach irrationalen, ungleichmässig wachsenden ω mit den zugehörigen Logarithmen der hyperbolischen Sectoren, Sinus und Cosinus, die zweite nach rationalen, regelmässig wachsenden ω mit den zugehörigen hyperbolischen Sektoren und den Logarithmen ihrer Tangenten. Demnach bliebe im Wesentlichen auch in diesen Tafeln für den Benutzer derselben vom gemeinschaftlichen Winkel φ keine Spur übrig. Ich will nicht von der Zweckmässigkeit oder Unzweckmässigkeit dieser Einrichtung, welche eine ganz aussergewöhnliche Mühe und Arbeit verursacht haben muss, sprechen, nur das Eine

muss ich anführen, dass die Herren Mossotti und Forti, um dem Titel ihres Werkes ein Genüge zu leisten, genöthigt waren, in dasselbe noch besonders als dritte Abtheilung die gewöhnlichen cyklisch-trigonometrischen Tafeln aufzunehmen.

§ 6.

Durch § 3 und 4 sind wir mehr als hinreichend in den Stand gesetzt, uns die Differenzialausdrücke der hyporbolischen Functionen zu verschaffen. So folgt aus $Cos\ z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$ durch Differentiation 1) $d\ Cos\ z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} dz = Sin\ z \,.\, dz$, ferner aus $Sin\ z = z + \frac{z^3}{1.2.3.} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5.} \ldots$ durch Differentiation.

$$2)\ d\,Sin\ z = \left(1 + \frac{z^2}{1.2.} + \frac{z^4}{1.2.3.4.} \ldots\right) d\,z = Cos\ z \,.\, d\,z.$$

Zu demselben Resultate hätten wir auch durch die sich dort vorfindenden Ausdrücke für $Sin\ (z+u)$ und $Cos\ (z+u)$ gelangen können, wenn wir darin $u = dz$ gesetzt hätten, und den Umstand benutzt hätten, dass $Cos\ (dz) = 1$ und $Sin\ (dz) = dz$ ist. Durch die bekannten Mittel folgt ferner:

$$3)\ d\,Tg\ z = \frac{dz}{Cos\ z^2},\ \text{da}\ Tg\ z = \frac{Sin\ z}{Cos\ z}\ \text{ist,}$$

$$4)\ d\,Cotg\ z = -\frac{d\,z}{Sin\ z^2},\ \text{da}\ Cotg\ z = \frac{Cos\ z}{Sin\ z}\ \text{ist;}$$

$$5)\ d\,Sec\ z = -\frac{Sin\ z\,.\,dz}{Cos\ z^2},\ \text{da}\ Sec\ z = \frac{1}{Cos\ z}\ \text{ist,}$$

$$6)\ d\,Cosec\ z = -\frac{Cos\ z\,.\,dz}{Sin\ z^2},\ \text{da}\ Cosec\ z = \frac{1}{Sin\ z}\ \text{ist.}$$

Dann erhält man, weil $d\ Log\ x = \frac{dx}{x}$ ist, aus $z = Log\ tg\,(45^0 + \frac{1}{2}\omega)$ durch Differentiation:

$$7)\ d\,z = \frac{d\,\omega}{cos\ \omega}\ \text{und da}\ cos\,\omega = \frac{1}{Cos\ z}\ \text{ist,}\ 8)\ d\,\omega = \frac{d\,z}{Cos\ z}.$$

und 9) $d\,Log\ z = \frac{d\,\omega}{cos\ \omega\,.\,Log\,.\,tg\ (45^0 + \frac{1}{2}\omega)}$ oder $d\ log\ z = \frac{M^2\,.\,d\,\omega}{cos\ \omega\,.\,log\,.\,tg\ (45 + \frac{1}{2}\omega)}$, wo M der bekannte Modul des briggischen Logarithmen-Systems ist.

Ebenso ergeben sich folgende Formeln:

$$10)\ d\,Log\,Sin\ z = Cotg\ z\,.\,d\,z = \frac{d\,\omega}{sin\ \omega\,.\,cos\ \omega}$$

$$11)\ d\,Log\,Cos\ z = Tg\ z\,.\,d\,z = tg\,\omega\,.\,d\,\omega$$

$$12)\ d\,Log\ Tg\ z = \frac{2\,d\,z}{Sin\,2\,z} = cotg\,\omega\,.\,d\,\omega,\ \text{ebenso}\ d\,Log\ Tg\,(\alpha + \tfrac{1}{2}z) = \frac{d\,z}{Sin\ (2\,\alpha + z)}$$

$$13)\ d\,Log\ Cotg\ z = -\frac{2\,d\,z}{Sin\ 2\,z} = -\,cotg\,\omega\,.\,d\,\omega$$

$$14)\ d\,Log\ Sec\ z = -\,Tg\ z\,.\,d\,z = -\,tg\,\omega\,.\,d\,\omega$$

$$15)\ d\,Log\ Cosec\ z = -\,Cotg\ z\,.\,d\,z = -\frac{2\,d\,\omega}{sin\ 2\,\omega}.$$

§ 7.

Diese Differenzialausdrücke sind nicht blos für die Integrationen nothwendig, sondern auch wichtig für die genaue Berechnung der trigonometrischen Functionen in den Fällen, wo die einfache Proportions-Interpolation nicht ausreicht. Da nun die Herren Mossotti und Forti ihre Tafeln mittelst des gemeinschaftlichen Winkels φ berechnet haben, wonach

$Sin\ z = \frac{sin\ \varphi}{\sqrt{cos\ 2\,\varphi}}$, $Cos\ z = \frac{cos\ \varphi}{\sqrt{cos\ 2\,\varphi}}$, $Tg\ z = tg\,\varphi$ und $z = \frac{log\,.\,tg\ (45^0 + \varphi)}{2\ M}$ ist, so war es

ihnen nothwendig, die kleinen Aenderungen (Δ) kennen zu lernen, welche die hyperbolischen Functionen erleiden, wenn φ um $d\varphi = \delta$ wächst. Diese Aenderungen finden sich in ihrem Werke pag. 31—33 folgender Massen angegeben:

1) $\Delta \log \sin \omega$, also $\Delta \log Tg\, z = \frac{2\,M\,.\,tg\,\delta}{\sin 2\,\varphi}$, 2) $\Delta \log Cos\, z = \frac{M\,.\,tg\,\varphi\,.\,tg\,\delta}{\cos 2\,\varphi}$

3) $\Delta \log .\, Sin\, z = \frac{M\,.\,tg\,\delta}{tg\,\varphi\,.\,\cos 2\,\varphi}$, 4) $\Delta \log z = \frac{2\,M\,.\,tg\,\delta}{\cos 2\,\varphi}$.

Leider ist der letzte Ausdruck für $\Delta \log z$ nicht richtig. Das Versehen ist daher entstanden, dass während noch auf pag. 26 richtig angegeben ist

$z = \frac{\log tg\,(45^0 + \varphi)}{2\,.\,\log e}$, es auf pag. 30 heisst $\log z = \log \frac{tg\,(45^0 + \varphi)}{2 \log e}$

statt $\log z = \log .\, \frac{\log .\, tg\,(45^0 + \varphi)}{2 \log e} = \log \frac{\log tg\,(45^0 + \varphi)}{2\,M}$.

Wenn man richtig rechnet, so erhält man $\Delta z = \frac{tg\,\delta}{\cos 2\,\varphi}$ und $\Delta \log z = \frac{2\,M^2\,.\,tg\,\delta}{\cos 2\varphi\,.\,\log tg\,(45^0 + \varphi)}$.

§ 8.

Wir wollen nun zur Integration durch hyperbolische Functionen übergehen. Setzt man statt der zu differenzirenden Ausdrücke $Sin\,z$, $Cos\,z$ .... successive x und bestimmt demgemäss den jedesmaligen endlichen Theil, so erhält man

Jetzt	Sonst	Bekanntlich ist:
1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = Ar.\, Sin\, x$	$= Log\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = ar.\, \sin x$
2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = Ar.\, Cos\, x$	$= Log\left(\sqrt{x^2-1} + x\right)$	$\int - \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = ar.\, \cos x$
3) $\int \frac{dx}{1-x^2} = Ar.\, Tg\, x$	$= \frac{1}{2}\, Log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = ar.\, tg\, x$
4) $\int - \frac{dx}{x^2-1} = Ar.\, Cotg\, x$	$= \frac{1}{2}\, Log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$	$\int - \frac{dx}{1+x^2} = ar.\, cotg\, x$
5) $\int - \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = Ar.\, Sec\, x$	$= Log\left(\frac{x}{1-\sqrt{1-x^2}}\right)$	$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = ar.\, sec\, x$
6) $\int - \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = Ar.\, Cosec\, x$	$= Log\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}-1}\right)$	$\int - \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = ar.\, cosec\, x.$

Ferner ist nach dem Vorigen 7) $\int \frac{d\omega}{\cos \omega} = Log\, tg\left(45 + \frac{\omega}{2}\right) = z$ und 8) $\int \frac{dz}{Cos\, z} = \omega$, wobei immer von der Constante abgesehen wird.*)

§ 9.

Da nach der theilweisen Integration

A) $\int x^{m-1}\left(a + b\,x^n\right)^p .\, dx = \frac{x^{m-n}\left(a + b x^n\right)^{p+1} - a\,(m-n)\int x^{m-n-1} .\, \left(a + b x^n\right)^p .\, dx}{b\,(p\,n + m)}$

oder $\int \frac{x^m\, dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x^{m-1}\,.\,\sqrt{1+x^2}}{m} - \frac{m-1}{m}\int \frac{x^{m-2}\, dx}{\sqrt{1+x^2}}$ ist, so hat man, wenn man successive $m = 2, 4, 6 \ldots$ und $\sqrt{1-x^2} = R$ setzt,

	Ganz analog ist bekanntlich
1) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = Ar\, Sin\, x = A$, (wo also $x = Sin\, A$)	a) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = ar\, \sin x = a$

*) Nimmt man z. B. das letzte Integral von 0 bis ∞, so ist $\int_0^\infty \frac{dz}{Cos\, z} = \frac{\pi}{2}$, wie Dr. Féaux (die hyperbolischen Functionen in den bestimmten Integralen, 1848, pag. 23) angegeben hat.

2) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\,x\,.\,R - \frac{1}{2}\,A$

3) $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \left(\frac{1}{4}\,x^3 - \frac{1\,.\,3}{1\,.\,4}\,x\right) R + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,A$

4) $\int \frac{x^6\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \left(\frac{1}{6}\,x^5 - \frac{1\,.\,5}{4\,.\,6}\,x^3 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,x\right) R - \frac{1.3.5}{2.4.6}\,A$

u. s. w.

b) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\,x\,r + \frac{1}{2}\,a$

c) $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{1}{4}\,x^3 + \frac{1.3}{2.4}\,x\right) r + \frac{1.3}{2.4}\,a$

u. s. w.,

wo $r = \sqrt{1-x^2}$.

Hätte man zu finden $\int dx\sqrt{1+x^2}$, so schreibe man dafür:

$$\int \frac{dx\,(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} + \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$ Demnach ist

5) $\int dx\,.\,\sqrt{1+x^2} = \frac{x\,.\,\sqrt{1+x^2}}{2} + \frac{A}{2} = \frac{Sin\,2A}{4} + \frac{1}{2}\,A,$

da $Sin\,2A = 2\,Sin\,A\,.\,Cos\,A = 2\,x\,.\,\sqrt{1+x^2}$ ist, wofür man früher benutzte:

$$\int dx\,.\,\sqrt{1+x^2} = \frac{x\,.\,\sqrt{1+x^2}}{2} + \frac{1}{2}\,Log\,(x + \sqrt{1+x^2}).$$

Als Analogon stelle ich noch hin: e) $\int dx\,.\,\sqrt{1-x^2} = \frac{sin\,2\,a}{4} + \frac{a}{2}$, wo $sin\,a = x$ ist.

§ 10.

Da man durch Umkehrung der Formel (A) erlangt;

$$\int x^{m-1}\,dx\,.\,(a+b\,x^n)^p = \frac{x^m\,.\,(a+b\,x^n)^{p+1}}{a\,m} - \frac{b\,.(p\,n+m+n)}{a\,m}\int x^{m+n-1}\,.\,dx\,.\,(a+b\,x^n)^p, \qquad B)$$

oder $$\int \frac{dx}{x^m\sqrt{1+x^2}} = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{(m-1)\,.\,x^{m-1}} - \frac{m-2}{m-1}\int \frac{dx}{x^{m-2}\,.\sqrt{1+x^2}}. \qquad C)$$

oder auch $$\int \frac{dx}{x^m\,.\,\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{(m-1)\,.\,x^{m-1}} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{1-x^2}}, \qquad D)$$ so ergiebt sich,

wenn man zunächst in (C) successive $m = 3, 5, 7, 9\ldots$ setzt, folgendes:

1) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = -Ar\,.\,Cosec\,x = -B.$

2) $\int \frac{dx}{x^3\,.\,\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{2x^2}\,R + \frac{1}{2}\,B.$

3) $\int \frac{dx}{x^5\sqrt{1+x^2}} = -\left(\frac{1}{4x^4} - \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,x^2}\right) R - \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,B.$

4) $\int \frac{dx}{x^7\,.\sqrt{1+x^2}} = -\left(\frac{1}{6x^6} - \frac{1\,.\,5}{4\,.\,6x^4} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6x^2}\right) R + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\,B.$

4) $\int \frac{dx}{x^9\,.\sqrt{1+x^2}} = -\left(\frac{1}{8x^8} - \frac{1\,.\,7}{6\,.\,8\,x^6} + \frac{1\,.\,5\,.\,7}{4\,.\,6\,.\,8\,x^4} - \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8\,x^2}\right) R - \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8}\,B.$

u. s. w.

Ebenso erhält man, wenn man in (D) successive $m = 3, 5, 7, 9\ldots$ setzt:

a) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -Ar\,Sec\,x = -C$

b) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2\,x^2}\,r - \frac{1}{2}\,C$

c) $\int \frac{dx}{x^5\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{1}{4\,x^4} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,x^2}\right) r - \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,C.$

d) $\int \frac{dx}{x^7\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{1}{6\,x^6} + \frac{1\,.\,5}{4\,.\,6\,x^4} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6\,x^2}\right) r - \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\,C$

e) $\int \frac{dx}{x^9\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{1}{8x^8} + \frac{1\,.\,7}{6\,.\,8\,x^6} + \frac{1\,.\,5\,.\,7}{4\,.\,6\,.\,8\,x^4} + \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8\,x^2}\right) r - \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8}\,C$

u. s. w.

§ 11.

E) Aus $\int \frac{dx}{(1-x^2)^m} = \frac{x}{2.(m-1)(1-x^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2m-2} \int \frac{dx}{(1-x^2)^{m-1}}$ leitet man ab

1) $\int \frac{dx}{1-x^2} = Ar\ Tg\ x = D$

2) $\int \frac{dx}{(1-x^2)^2} = \frac{1 \,.\, x}{2\ (1-x^2)} + \frac{1}{2} D$

3) $\int \frac{dx}{(1-x^2)^3} = \frac{1 \,.\, x}{4.(1-x^2)^2} + \frac{1.3.\ x}{2.4\ (1-x^2)} + \frac{1.3}{2.4}.D$

4) $\int \frac{dx}{(1-x^2)^4} = \frac{1.\ x}{6.(1-x^2)^3} + \frac{1.5\ \ x}{4.6\ (1-x^2)^2} + \frac{1.3.5\ \ x}{2.4.6\ (1-x^2)} + \frac{1.3.5}{2.4.6} D.$

u. s. w.

F) Aus $\int \frac{x^m\, dx}{1-x^2} = -\frac{1}{m-1} x^{m-1} + \int \frac{x^{m-2}\, dx}{1-x^2}$ folgere ich unter andern, dass

5) $\int \frac{x^2\, dx}{1-x^2} = -x + D$ ist.

G) Aus $\int \frac{x^2\, dx}{(1-x^2)^m} = \frac{1}{2(m-1)} \cdot \frac{x}{(1-x^2)^{m-1}} - \frac{1}{2(m-1)} \int \frac{dx}{(1-x^2)^{m-1}}$ ziehe ich nur den Schluss:

6) $\int \frac{x^2\, dx}{(1-x^2)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{1-x^2} - \frac{1}{2} D$

Ich stelle die bekannten analogen cyklischen Formeln daneben:

a) $\int \frac{dx}{1+x^2} = ar\ tg\ x = \mathrm{d}$, b) $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1.\ \ x}{4.(1+x^2)} + \frac{1}{2} d$

c) $\int \frac{dx}{(1+x^2)^3} = \frac{1.\ \ x}{4.(1+x^2)^2} + \frac{1.3.\ \ x}{2.4.(1+x^2)} + \frac{1.3}{2.4} d$

d) $\int \frac{dx}{(1+x^2)^4} = \frac{1.\ \ x}{6.(1+x^2)^3} + \frac{1.5.\ \ x}{4.6.(1+x^2)^2} + \frac{1.3.5.\ \ x}{2.4.6.(1+x^2)} + \frac{1.3.5}{2.4.6} d$

u. s. w.

e) $\int \frac{x^2\, dx}{1+x^2} = x - d$; f) $\int \frac{x^2\, dx}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2} \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2} d.$

§ 12

H) Aus $\int \frac{dx}{x^m.(a+bx^2)^n} = -\frac{1}{(m-1)a.x^{m-1}\ (a+bx^2)^{n-1}} - \frac{m+2n-3}{(m-1)a} \int \frac{dx}{x^{m-2}\ (a+bx^2)^n}$

erhält man

$$\int \frac{dx}{x^2.(1+x^2)} = -\frac{1}{x} - \int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{x} - ar\ tg\ x = -\frac{1}{x} - d$$

$$\int \frac{dx}{x^2.(1-x^2)} = -\frac{1}{x} + \int \frac{dx}{1-x^2} = -\frac{1}{x} + Ar\ Tg\ x = -\frac{1}{x} + D.$$

$$\int \frac{dx}{x^2.(x^2-1)} = -\frac{1}{x} + \int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{x} - Ar\ Cotg\ x = \frac{1}{x} - E.$$

u. s. w.

I) und aus $\int \frac{x^m\, dx}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x^{m-1}.\sqrt{x^2-1}}{m} + \frac{m-1}{m} \int \frac{x^{m-2}\, dx}{\sqrt{x^2-1}}$

ergiebt sich unter andern

$$\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x.\sqrt{x^2-1}}{2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x.\sqrt{x^2-1}}{2} + \frac{1}{2} Ar\ Cos\ x = \frac{x.\sqrt{x^2-1}}{2} + \frac{F}{2} = \frac{Sin\, 2F}{4} + \frac{F}{2}.$$

Das letzte Integral führt auch leicht zu einem andern Analogon für § 9, 5; nämlich zu:

$$\int dx.\sqrt{x^2-1} = \frac{x.\sqrt{x^2-1}}{2} - \frac{F}{2} = \frac{Sin\, 2F}{4} - \frac{F}{2}, \text{ da } x = Cos F \text{ ist.}$$

§ 13.

Ich will noch einige einfache logarithmische Integrale anführen, bei deren Berechnung man sich mit gleichem Vortheil der cyklischen und hyperbolischen Functionen bedienen kann.

$$1)\ \int \frac{x\,dx}{1-x^2} = -\tfrac{1}{2} Log(1-x^2) = -Log\, cos\, \omega, \text{ wenn } sin\, \omega = x, = -Log\, Sec\, z, \text{ wenn } x = Tg\, z$$

$$2)\ \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \tfrac{1}{2} Log(1+x^2) = Log\, Cos\, z, \text{ wenn } Sin\, z = x, = Log\, sec\, \omega, \text{ wenn } x = tg\, \omega$$

$$3)\ \int \frac{dx}{x\,.\,(1-x^2)} = \tfrac{1}{2} Log \frac{x^2}{1-x^2} = Log\, tg\, \omega, \text{ wenn } sin\, \omega = x, = Log\, Sin\, z, \text{ wenn } x = Tg\, z$$

$$4)\ \int \frac{dx}{x\,.\,(1+x^2)} = \tfrac{1}{2} Log \frac{x^2}{1+x^2} = Log\, Tg\, z, \text{ wenn } Sin\, z = x, = Log\, sin\, \omega, \text{ wenn } x = tg\, \omega$$

$$5)\ \int \frac{x\,dx}{(1-x^2)} = \tfrac{1}{2} Log(x^2-1) = Log\, Sin\, z, \text{ wenn } Cos\, z = x, = Log\, tg\, \omega, \text{ wenn } x = sec\, \omega$$

$$6)\ \int \frac{dx}{x\,.\,(x^2-1)} = \tfrac{1}{2} Log \frac{x^2-1}{x^2} = Log\, Tg\, z, \text{ wenn } Cos\, z = x, = Log\, sin\, \omega, \text{ wenn } x = sec\, \omega.$$

§ 14.

In gleicher Weise kann man folgende einfache Integralformeln nach Belieben durch Anwendung von cyklischen oder von hyperbolischen Functionen zur logarithmischen Berechnung einrichten:

$$1)\ \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} = -r, \quad 2)\ \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{1\,.\,2}{1\,.\,3}\right) r,$$

$$3)\ \int x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{r^3}{3}, \quad 4)\ \int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{r}, \quad 5)\ \int \frac{x\,dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{r}{x},$$

$$6)\ \int \frac{x\,dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{r};$$

$$a)\ \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2} = R, \quad b)\ \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1\,.\,2}{1\,.\,3}\right) R, \quad c)\ \int x\,.\,\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{R^3}{3},$$

$$d)\ \int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{R}, \quad e)\ \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = -\frac{R}{x}, \quad f)\ \int \frac{x\,dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{R};$$

$$\alpha)\ \int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{x^2-1} = w, \quad \beta)\ \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2-1}} = \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{1\,.\,2}{1\,,\,3}\right) w, \quad \gamma)\ \int x\sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{w^3}{3},$$

$$\delta)\ \int \frac{dx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{w}, \quad \varepsilon)\ \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \frac{w}{x}, \quad \zeta)\ \int \frac{x\,dx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{w}.$$

§ 15.

In § 8 liegen noch folgende Sätze, welche ich hervorhebe, weil sie auch, abgesehen von der Integralrechnung, in vielen Fällen zur Abkürzung von Rechnungen benutzt werden können:

$$1)\ Log\sqrt{\frac{1\pm x}{1\mp x}} = \pm Ar\, Tg\, x \text{ oder } log\sqrt{\frac{1\pm x}{1\mp x}} = \pm Ar'\, Tg\, x, \text{ wobei } M\,.\,Ar = Ar' \text{ ist.}$$

$$2)\ log\left(\sqrt{1+x^2} \pm x\right) = \pm Ar'\, Sin\, x, \quad 3)\ log\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right) = \pm Ar'\, Cos\, x,$$

$$4)\ log\sqrt{\frac{x\pm 1}{x\mp 1}} = \pm Ar'\, Cotg\, x, \quad 5)\ log\frac{1\pm\sqrt{1-x^2}}{x} = \pm Ar'\, Sec\, x,$$

$$6)\ log\frac{\sqrt{1+x^2}\pm 1}{x} = \pm Ar'\, Cosec\, x.$$

Ich erinnere hiebei noch, dass meine Tafeln nicht die $Ar = z$, sondern gerade die $Ar' = z'$ enthalten.

§ 16.

Wir wollen jetzt allmählich zu verwickelteren Integralen übergehen. Da, wenn $Cos\, z = x$ gesetzt wird, $Sin\, vers\, z = x - 1$ und $Cotg\, \frac{1}{2} z = \sqrt{\frac{Cos\, z + 1}{Cos\, z - 1}} = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ ist, so hat man für das schon aufgestellte Integral $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ folgende Formeln: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = Ar\, Cos\, x = Ar\, Sin\, vers (x-1) = 2 . Ar\, Cotg \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = Ar . Sin\ \sqrt{x^2-1}$, u. s. w. Nimmt man nun $x = 1 + \frac{2x}{a}$ an, so geht dasselbe über in:

$$1) \int \frac{dx}{\sqrt{ax+x^2}} = Ar\, Sin\, vers \frac{2x}{a} = Ar . Cos \frac{a+2x}{a} = 2\, Ar\, Cotg \sqrt{\frac{a+x}{x}} = A,$$

statt des früher gebräuchlichen Ausdrucks: $Log \left[\frac{a+2x}{2} + \sqrt{ax+x^2}\right]$.

Nach § 14, α) ist $\int \frac{y\, dy}{\sqrt{y^2-1}} = \sqrt{y^2 - 1}$. Setzt man $y = \xi + 1$, so hat man:

$$\int \frac{(\xi+1)\, d\xi}{\sqrt{2\xi+\xi^2}} = \int \frac{\xi\, d\xi}{\sqrt{2\xi+\xi^2}} + \int \frac{d\xi}{\sqrt{2\xi+\xi^2}} = \sqrt{2\xi+\xi^2} \text{ oder}$$

$$\int \frac{\xi\, d\xi}{\sqrt{2\xi+\xi^2}} = \sqrt{2\xi+\xi^2} - \int \frac{d\xi}{\sqrt{2\xi+\xi^2}} = \sqrt{2\xi+\xi^2} - Ar\, Sin\, vers\, \xi$$

und wenn man $\xi = \frac{2x}{a}$ annimmt, so erhält man:

$$2) \int \frac{x\, dx}{\sqrt{ax+x^2}} = \sqrt{ax+x^2} - \frac{a}{r} . Ar\, Sin\, vers \frac{2x}{a} = \sqrt{ax+x^2} - \frac{a}{2} Ar . Sin \frac{2}{a} \sqrt{ax+x^2}$$

$$= \frac{a}{2}\Big(Sin\ A - A\Big) = x\, Cotg \frac{A}{2} - a \frac{A}{2}, \text{ da } Cotg \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{a+x}{x}} \text{ ist.}$$

Um $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{ax+x^2}}$ zu finden, setze man $x = \frac{a}{2}\xi$ und $\xi = y - 1$, also $x = \frac{ay}{2} - \frac{a}{2}$.

Dies giebt $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{ax+x^2}} = \frac{a^2}{4} \int \frac{y^2\, dy}{\sqrt{y^2-1}} - \frac{a^2}{2} \int \frac{y\, dy}{\sqrt{y^2-1}} + \frac{a^2}{4} \int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}$

$$= \frac{a^2}{8} y \sqrt{y^2-1} + \frac{a^2}{8} Ar . Cos\, y - \frac{a^2}{2} \sqrt{y^2-1} + \frac{a^2}{4} Ar . Cos\, y$$

$$= \frac{a^2}{8} \left[(y - 4) \sqrt{y^2-1} + 3\, Ar\, Cos\, y\right]$$

also $3) \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{ax+x^2}} = \frac{2x - 3a}{4} \sqrt{ax+x^2} + \frac{3a^2}{8} Ar\, Cos \frac{a+2x}{a} = \frac{a^2}{16}\left[Sin\, 2A - 8\, Sin\, A + 6A\right]$.

In ähnlicher Weise erlangt man:

$$4) \int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{ax+x^2}} = \frac{8x^2 - 10ax + 15a^2}{24} \sqrt{ax+x^2} - \frac{5}{16} a^3 . Ar . Cos \frac{a+2x}{a}.$$

$$= \frac{a^3}{96} \left[Sin\, 3A - 9\, Sin\, 2A + 45\, Sin\, A - 30A\right],$$

wobei bedacht werden muss, dass $Sin\, 3A = 3\, Sin\, A + 4\, Sin\, A^3$ ist.

Die analogen cyklischen Formeln sind:

$$\alpha) \int \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}} = ar . cos \frac{a-2x}{a} = \alpha,$$

$$\beta) \int \frac{x\, dx}{\sqrt{ax-x^2}} = -\sqrt{ax-x^2} + \frac{a}{2} ar . cos \frac{a-2x}{a} = \frac{a}{2}\left[-sin\, \alpha + \alpha\right]$$

$$= -x . cotg \tfrac{1}{2} \alpha + a \frac{\alpha}{2}, \text{ wo } cotg \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{a-x}{x}} \text{ ist.}$$

$$\gamma) \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{ax-x^2}} = -\frac{2x+3a}{4} \sqrt{ax-x^2} + \frac{3a^2}{8} . ar . cos \frac{a-2x}{a} = \frac{a^2}{16}\left[sin\, 2\alpha - 8\, sin\, \alpha + 6\alpha\right]$$

$$\delta)\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{ax-x^2}}=\frac{8x^2+10ax+15a^2}{24}\cdot\sqrt{ax-x^2}+\frac{5}{16}a^3\cdot ar\cdot\cos\frac{a-2x}{a}$$
$$=\frac{a^3}{96}\Big[-\sin 3\alpha+9\sin 2\alpha-45\sin\alpha+30\alpha\Big].$$

§ 17.

Aus § 16, Nr. 1 und 2 ergiebt sich leicht, dass
$\int\frac{dx}{\sqrt{ax+bx^2}}=\frac{1}{\sqrt{b}}Ar.\,Cos\frac{a+2bx}{a}=\frac{1}{\sqrt{b}}A$, (wo also $Cos\,A=\frac{a+2bx}{a}$) und dass

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{ax+bx^2}}=\frac{\sqrt{ax+bx^2}}{b}-\frac{a}{2b.\sqrt{b}}.A \text{ ist.}$$

Nun ist $\int\frac{dx.\sqrt{ax+bx^2}}{x}=a\int\frac{dx}{\sqrt{ax+bx^2}}+b\int\frac{x\,dx}{\sqrt{ax+bx^2}}=\frac{a}{\sqrt{b}}A+\left(\sqrt{ax+bx^2}-\frac{a}{2\sqrt{b}}A\right)$.

Demnach erhalten wir;

$$\text{I)}\int\frac{\sqrt{ax+bx^2}}{x}dx=\sqrt{ax+bx^2}+\frac{a}{2\sqrt{b}}A=x.\sqrt{b}.\,Cotg\frac{A}{2}+\frac{a}{\sqrt{b}}\cdot\frac{A}{2},$$

da $Cotg\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{a+bx}{bx}}=\frac{\sqrt{ax+bx^2}}{x\sqrt{b}}$ ist.

Die entsprechende cyklische Formel ist:

$$1)\int\frac{\sqrt{ax-bx^2}}{x}dx=\sqrt{ax-bx^2}+\frac{a}{2\sqrt{b}}.\alpha=x\sqrt{b}.\cot g\frac{\alpha}{2}+\frac{a}{\sqrt{b}}\cdot\frac{\alpha}{2},$$

wo $\cos\alpha=\frac{a-2bx}{a}$ und $\cot g\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{a-bx}{bx}}=\frac{\sqrt{ax-bx^2}}{x\sqrt{b}}$ ist.

Ferner ist $\int\sqrt{ax+x^2}.\,dx=a\int\frac{x\,dx}{\sqrt{ax+x^2}}+\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{ax+x^2}}$,

$$\text{also II)}\int\sqrt{ax+x^2}.\,dx=\frac{a+2x}{4}\sqrt{ax+x^2}-\frac{a^2}{8}Ar\;Cos\frac{a+2x}{a}$$
$$=\frac{ax}{4}.\,Cos\,A.\,Cotg\frac{A}{2}-\frac{a^2}{8}A.$$

da aus $Cos\,A=\frac{a+2x}{a}$ sich ergiebt $Cotg\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{a+x}{x}}=\frac{\sqrt{ax+x^2}}{x}$.

Dem entspricht die cyklische Formel:

$$2)\int\sqrt{ax-x^2}.\,dx=-\frac{a-2x}{4}\sqrt{ax-x^2}+\frac{a^2}{8}.\,ar\;\cos\frac{a-2x}{a}$$
$$=-\frac{ax}{4}.\cos\alpha\,.\,\cot g\tfrac{1}{2}\alpha+\frac{a^2}{8}\alpha.$$

wo $\cos\alpha=\frac{a-2x}{a}$ und also $\cot g\frac{1}{2}\alpha=\frac{\sqrt{ax-x^2}}{x}$ ist.

In derselben Weise kann man $\int x\sqrt{ax+x^2}\,dx$ finden, doch setzen wir der Abwechslung wegen: $\int x\sqrt{ax+x^2}\,dx=(fx^2+gx+h)\sqrt{ax+x^2}+k.\,a^3.\,Ar\;Cos\frac{a+2x}{a}$.
Da (§ 6, 1) alsdann $\frac{(fx^2+gx+h)(a+2x)}{\sqrt{ax+x^2}}+\sqrt{ax+x^2}\,(2fx+g)+\frac{k.a^3}{\sqrt{ax+x^2}}=$
$x\sqrt{ax+x^2}$ ist, so hat man, weil $f=\frac{1}{3}$, $g=\frac{a}{12}$, $h=-\frac{a^2}{8}$, $k=\frac{1}{16}$ gefunden wird,

$$\text{III.}\int x\sqrt{ax+x^2}\,dx=\frac{8x^2+2ax-3a^2}{24}\sqrt{ax+x^2}+\frac{a^3}{16}Ar.\,Cos\frac{a+2x}{a}$$
$$=\frac{a^2}{48}\Big[2\,Sin\,A^3-3\,Sin\,A.\,Cos\,A+3\,A\Big],$$

weil $Sin\,A=\frac{2}{a}\sqrt{ax+x^2}$, $x=\frac{a}{2}(Cos\,A-1)$ und $Cos\,A^2=1+Sin\,A^2$ ist.

Dem analog ist die cyklische Formel:

$$3)\int x\sqrt{ax-x^2}\,.\,dx=\frac{8x^2-2ax-3a^2}{24}\,.\,\sqrt{ax-x^2}+\frac{a^3}{16}\,.\,ar\,.\cos\frac{a-2x}{a}.$$

$$=-\frac{a^3}{48}\left[2\sin\alpha^3+3\sin\alpha\,.\cos\alpha-3\alpha\right]$$

da $\sin\alpha=\frac{2}{a}\sqrt{ax-x^2}$ und $x=\frac{a}{2}(1-\cos\alpha)$ ist.

§ 18.

Bekanntlich ist $1)\int\frac{dx}{a+2bx+cx^2}=\frac{\alpha}{\sqrt{ac-b^2}}$ für $tg\,\alpha=\frac{b+cx}{\sqrt{ac-b^2}}$, wenn $a\,c$ positiv und grösser als b^2 ist. Ist aber $b^2>a\,c$, so schrieb man bis jetzt

$$2)\int\frac{dx}{a+2bx+cx^2}=\frac{1}{2.\sqrt{b^2-ac}}\,Log\frac{b+cx-\sqrt{b^2-ac}}{b+cx+\sqrt{b^2-ac}}=J,\text{ für }b+cx>\sqrt{b^2-ac}\text{ und}$$

$$3)\qquad=\frac{1}{2\sqrt{b^2-ac}}\,Log\frac{\sqrt{b^2-ac}-(b+cx)}{\sqrt{b^2-ac}+(b+cx)}=J'\text{ für }b+cx<\sqrt{b^2-ac}$$

Vermittelst der hyperbolischen Functionen kann man aber den beiden letzten Formeln eine der ersten Formel ganz entsprechende Gestalt geben. Setzt man nämlich $\frac{b+cx}{\sqrt{b^2-ac}}=u$, so ist nach § 15, Nr 4

$$\text{II) }J=\frac{1}{\sqrt{b^2-ac}}\,Log\sqrt{\frac{u-1}{u+1}}=-\frac{Ar\,.\,Cotg\,u}{\sqrt{b^2-ac}}\text{ und nach § 15, Nr. 1}$$

$$\text{III) }J'=\frac{1}{\sqrt{b^2-ac}}\,Log\sqrt{\frac{1-u}{1+u}}=-\frac{Ar\,.\,Tg\,u}{\sqrt{b^2-ac}}.$$

Man kann sich aber auch die beiden letzten hyperbolischen Integrale selbstständig verschaffen, indem man an § 8, Nr. 3 und Nr. 4 anknüpft. Setzt man nämlich in die dortige Gleichung $\int\frac{dy}{1-y^2}=Ar\,.\,Tg\,y$ statt $y=\frac{p}{q}\,.\,\xi$, so erhält man zunächst $\int\frac{d\xi}{p^2-q^2\xi^2}=\frac{1}{pq}Ar\,Tg\frac{p}{q}\,y$ oder

$\int\frac{d\xi}{\alpha-\beta\xi^2}=\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}Ar\,.\,Tg\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\,.\,\xi$. Dann giebt $\xi=x+\gamma$ folgende Gleichung:

$\int\frac{dx}{(\alpha-\beta\gamma^2)-2\beta\gamma x-\beta x^2}=\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}Ar\,.\,Tg\,(x+\gamma)\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$. Setzt man nun

$\alpha-\beta\gamma^2=a$, $\beta\gamma=-b$, $\beta=-c$, wodurch $\gamma=\frac{b}{c}$, $\alpha=\frac{b^2-ac}{-c.}$,

$\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{b^2-ac}$ und $\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}=\frac{c}{\sqrt{b^2-ac}}$ wird, so erhält man

$$\text{C) }\int\frac{dx}{a+2bx+cx^2}=\frac{1}{\sqrt{b^2-ac}}\,.\,Ar\,.\,Tg\frac{b+cx}{\sqrt{b^2-ac}}=\frac{A}{\sqrt{b^2-ac}}\text{ für }Tg\,A=\frac{b+cx}{\sqrt{b^2-ac}}.$$

Um die Formel II abzuleiten, substituire man in $\int-\frac{dy}{y^2-1}=Ar\,.\,Cotg\,y$ sofort $\frac{p}{q}(x+\gamma)$ statt y. Dies führt auf:

$$\int\frac{dx}{(p^2\gamma^2-q^2)+2\gamma\,.\,p^2x+p^2x^2}=-\frac{1}{p\cdot q}\,Ar\,.\,Cotg\,\frac{p}{q}(x+\gamma)\text{, oder}$$

$$\text{B) }\int\frac{dx}{a+2bx+cx^2}=-\frac{1}{\sqrt{b^2-ac}}\,.\,Ar\,.\,Cotg\,\frac{b+cx}{\sqrt{b^2-ac}}=-\frac{A}{\sqrt{b^2-ac}}\text{ für }Cotg\,A=\frac{b+cx}{\sqrt{b^2-ac}}$$

Dass die Vorzeichen in den beiden Entwicklungen für III und für C nicht stimmen, hat hier nichts zu sagen, da $\sqrt{b^2-ac}$ positiv oder negativ genommen werden kann.

Den Fall, dass $b^2 = a\,c$ ist, können wir übergehen, da alsdann $a + 2\,b\,x + c\,x^2 = (\sqrt{a} + \sqrt{c}\,x)^2$ und daher $\int \frac{d\,x}{a + 2\,b\,x + c\,x^2} = -\frac{1}{\sqrt{ac} + c\,x}$ ist.

§ 19.

Durch dieselben einfachen Mittel gelangen wir, wenn wir von § 8, Nr. 1 und Nr. 2, nämlich von den Gleichungen $\int \frac{d\,\xi}{\sqrt{\xi^2 + 1}} = Ar\,.\,Sin\,\xi$ und $\int \frac{d\,\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} = Ar\,.\,Cos\,\xi$ ausgehen, zu folgenden beiden Formeln, welche sich auch in Gudermann's Werk über Potenzialfunctionen pag. 13 vorfinden:

$$\text{A)}\quad y = \int \frac{d\,x}{\sqrt{a + 2\,b\,x + c\,x^2}} = \frac{A}{\sqrt{c}},\ \text{wo } Sin\,A = \frac{b + c\,x}{\sqrt{a\,c - b^2}}$$

$$\text{B)}\quad y = \frac{A}{\sqrt{c}},\ \text{wo } Cos\,A = \frac{b + c\,x}{\sqrt{b^2 - a\,c}}\ \text{ist.}$$

Beide Formeln setzen voraus, dass c positiv ist, die erste ausserdem, dass $a\,c > b^2$, die zweite, dass $b^2 > a\,c$ ist. Hiefür hatte man früher $y = \frac{Log\,[b + c\,x + \sqrt{c}\,\sqrt{a + 2\,b\,x + c\,x^2}]}{\sqrt{c}}$.

Ist aber c negativ, dann gelten folgende cyklischen Formeln:

$$1)\quad y = \frac{\alpha}{\sqrt{-c}},\ \text{für } sin\,\alpha = -\frac{b + c\,x}{\sqrt{b^2 - a\,c}},\ \text{oder} = -\frac{\alpha}{\sqrt{-c}},\ \text{für } sin\,\alpha = \frac{b + c\,x}{\sqrt{b^2 - a\,c}}.$$

$$2)\quad y = -\frac{\alpha}{\sqrt{-c}},\ \text{für } cos\,\alpha = -\frac{b + c\,x}{\sqrt{b^2 - a\,c}},\ \text{oder} = \frac{\alpha}{\sqrt{-c}},\ \text{für } cos\,\alpha = \frac{b + c\,x}{\sqrt{b^2 - a\,c}}.$$

Wenn Gudermann aber pag. 114 schreibt:

$$y = \frac{k}{\sqrt{-c}},\ \text{für } sin\,k = \frac{b + c\,x}{\sqrt{b^2 - a\,c}}\ \text{oder für } cos\,k = \frac{b + c\,x}{\sqrt{b^2 - a\,c}},$$

so liegt darin ein Irrthum.

Der Fall, dass $b^2 = a\,c$ ist, kann wieder übergangen werden, da alsdann ohne weiteres $y = \frac{Log\,(\sqrt{a} + \sqrt{c}\,x)}{\sqrt{c}}$ ist.

§ 20.

Geht man, durch § 16 Nr. 2 geleitet, von

$\int \frac{x\,d\,x}{\sqrt{a + 2\,b\,x + c\,x^2}} = p\,.\,\sqrt{a + 2\,b\,x + c\,x^2} + q \int \frac{d\,x}{\sqrt{a + 2\,b\,x + c\,x^2}}$ aus, so findet man durch Differentiation, dass $p = \frac{1}{c}$ und $q = -\frac{b}{c}$ ist. Demnach ist stets $Y = \int \frac{x\,d\,x}{\sqrt{a + 2\,b\,x + c\,x^2}} = \frac{\sqrt{a + 2\,b\,x + c\,x^2}}{c} - \frac{b}{c}\,y$, wo y nach Beschaffenheit der Coefficienten a, b, c einen der im vorigen § aufgestellten Werthe hat.

I. Ist nämlich c positiv, so gelangt man leicht zu folgenden zwei hyperbolischen Formeln:

$$\text{A)}\quad Y = \frac{1}{c\sqrt{c}}\left[\sqrt{a\,c - b^2}\,.\,Cos\,A - b\,.\,A\right],\ \text{für } Sin\,A = \frac{b + c\,x}{\sqrt{a\,c - b^2}},$$

$$\text{B)}\quad Y = \frac{1}{c\sqrt{c}}\left[\sqrt{b^2 - a\,c}\,.\,Sin\,A - b\,.\,A\right],\ \text{für } Cos\,A = \frac{b + c\,x}{\sqrt{b^2 - a\,c}}.$$

II. Ist aber c negativ, so gelten die verwandten cyklischen Formeln:

$$1)\quad Y = \frac{1}{c\sqrt{-c}}\left[\sqrt{b^2 - a\,c}\,.\,cos\,\alpha + b\,.\,\alpha\right],\ \text{für } sin\,\alpha = \frac{b + c\,x}{\sqrt{b^2 - a\,c}},$$

$$2)\quad Y = \frac{1}{c\sqrt{-c}}\left[\sqrt{b^2 - a\,c}\,.\,sin\,\alpha - b\,.\,\alpha\right],\ \text{für } cos\,\alpha = \frac{b + c\,x}{\sqrt{b^2 - a\,c}}.$$

§ 21.

Ferner ist $d\left[x\sqrt{a+2bx+cx^2}\right] = W\,.\,dx + \frac{(bx+cx^2)\,dx}{W} = \frac{(a+3bx+2cx^2)\,dx}{W}$ wenn der Kürze wegen $\sqrt{a+2bx+cx^2} = W$ gesetzt wird.

Demnach ist $x\,.\,W = a\int\frac{dx}{W} + 3b\int\frac{x\,dx}{W} + 2c\int\frac{x^2\,dx}{W}$, oder

$$\int\frac{x^2\,dx}{W} = \frac{x\,.\,W}{2c} - \frac{a}{2c}\int\frac{dx}{W} - \frac{3b}{2c}\int\frac{x\,dx}{W}$$

und mit Zuhilfenahme der beiden letzten §§:

$$J = \int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}} = \frac{cx-3b}{2c^2}\,W + \frac{3b^2-ac}{2c^2}\,.\,y.$$

Je nachdem nun c positiv oder negativ und $b^2 \gtrless ac$ ist, prägt sich die vorige Integralgleichung in folgenden Formen aus:

$$\left.\begin{array}{l} \text{A)}\ J = \frac{(b^2-ac)\,Sin\,A\,.\,Cos\,A - 4b\,.\,\sqrt{b^2-ac}\,.\,Sin\,A + (3b^2-ac)\,A}{2c^2\,.\,\sqrt{c}},\ \text{für}\ Cos\,A = \frac{b+cx}{\sqrt{b^2-ac}} \\ \text{B)}\ J = \frac{(ac-b^2)\,Sin\,A\,.\,Cos\,A - 4b\,.\,\sqrt{ac-b^2}\,.\,Cos\,A + (3b^2-ac)\,A}{2c^2\,.\,\sqrt{c}},\ \text{für}\ Sin\,A = \frac{b+cx}{\sqrt{ac-b^2}} \end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{1)}\ J = \frac{(b^2-ac)\sin\alpha\,.\cos\alpha - 4b\,.\,\sqrt{b^2-ac}\,\sin\alpha + (3b^2-ac)\,\alpha}{2c^2\,.\,\sqrt{-c}},\ \text{für}\ \cos\alpha = \frac{b+cx}{\sqrt{b^2-ac}} \\ \text{2)}\ J = \frac{(b^2-ac)\,.\sin\alpha\,.\cos\alpha - 4b\,.\,\sqrt{b^2-ac}\,.\cos\alpha - (3b^2-ac)\,\alpha}{2c^2\,.\,\sqrt{-c}},\ \text{für}\ \sin\alpha = \frac{b+cx}{\sqrt{b^2-ac}} \end{array}\right\}.$$

Anmerk. Ist $b^2 = ac$, dann ist $Y = \int\frac{x\,dx}{W} = \frac{cx - \sqrt{ac}\,Log\,.\,(\sqrt{a}+\sqrt{c}\,x)}{c\sqrt{c}}$ und

$$J = \int\frac{x^2\,dx}{W} = \frac{cx^2 - 2\sqrt{ac}\,x + 2a\,Log\,.\,(\sqrt{a}+\sqrt{c}\,x)}{2c\sqrt{c}}.$$

§ 22.

Nachdem man sich überzeugt hat, dass $\left(\int\frac{dw}{\cos w} = z,\right)$ I) $\int\frac{dz}{Cos\,z} = \omega$, (§ 8, Nr. 7 u. 8), $\left(\int\frac{d\omega}{\sin\omega} = Log\,tg\,\frac{\omega}{2},\right)$ $\int\frac{dz}{Sin\,z} = Log\,Tg\,\frac{z}{2}$, dass ferner $\left(\int\frac{d\omega}{\sin\omega^2} = -\,cotg\,\omega,\right.$ $\left.\int\frac{d\omega}{\cos\omega^2} = tg\,\omega,\right)$ $\int\frac{dz}{Sin\,z^2} = -\,Cotg\,z$ und $\int\frac{dz}{Cos\,z^2} = Tg\,z$ (§ 6, Nr. 3 u. 4) ist, kann man sich leicht mit Hilfe folgender zwei Reductionsformeln:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}^{\,m+1}} = \frac{1}{m-1}\left[\frac{x}{\sqrt{1+x^2}^{\,m-1}} + (m-2)\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}^{\,m-1}}\right]$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}^{\,m+1}} = -\frac{1}{m-1}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2-1}^{\,m-1}} + (m-2)\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}^{\,m-1}}\right]$$

die Integrale von $\frac{dz}{Cos\,z^m}$ und $\frac{dz}{Sin\,z^m}$ verschaffen. Ich werde mich aber nur bei dem ersten Integral ein wenig verweilen, da ich das andere im Verlauf meiner Arbeit nicht zu gebrauchen gedenke.

Setzt man $Sin\,z = x$, dann ist $Cos\,z = \sqrt{1+x^2}$ und $dz = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$, mithin

$$\int\frac{dz}{Cos\,z^m} = \int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}^{\,m+1}} = \frac{1}{m-1}\,\frac{Sin\,z}{Cos\,z^{m-1}} + \frac{m+2}{m-1}\int\frac{dz}{Cos\,z^{m-2}}.$$

Ich will für m bloss die ungeraden Zahlen setzen und erhalte dann:

$$\text{II)} \int \frac{dz}{Cos\, z^3} = \frac{1}{2} \frac{Sin\, z}{Cos\, z^2} + \tfrac{1}{2}\, \omega$$

$$\text{III)} \int \frac{dz}{Cos\, z^5} = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{Sin\, z}{Cos\, z^4} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4} \frac{Sin\, z}{Cos\, z^2} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\, \omega$$

$$\text{IV)} \int \frac{dz}{Cos\, z^7} = \tfrac{1}{6} \frac{Sin\, z}{Cos\, z^6} + \frac{1\,.\,5}{4\,.\,6} \frac{Sin\, z}{Cos\, z^4} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6} \frac{Sin\, z}{Cos\, z^2} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\, \omega$$

$$\text{V)} \int \frac{dz}{Cos\, z^9} = \tfrac{1}{8} \frac{Sin\, z}{Cos\, z^8} + \frac{1\,.\,7}{6\,.\,8} \frac{Sin\, z}{Cos\, z^6} + \frac{1\,.\,5\,.\,7}{4\,.\,6\,.\,8} \frac{Sin\, z}{Cos\, z^4} + \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8} \frac{Sin\, z}{Cos\, z^2} + \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8}\, \omega$$

$$\text{VI)} \int \frac{dz}{Cos\, z^{11}} + \frac{1}{10} \frac{Sin\, z}{Cos\, z^{10}} + \frac{1\,.\,9}{8\,.\,10} \frac{Sin\, z}{Cos\, z^8} + \frac{1\,.\,7\,.\,9}{6\,.\,8\,.\,10} \frac{Sin\, z}{Cos\, z^6} + \frac{1\,.\,5\,.\,7\,.\,9}{4\,.\,6\,.\,8\,.\,10} \frac{Sin\, z}{Cos\, z^4} +$$

$$\frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,.\,9}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8\,.\,10} \frac{Sin\, z}{Cos\, z^2} + \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,.\,9}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8\,.\,10}\, \omega.$$

u. s. w.

In Bezug auf I) will ich noch eine Bemerkung machen. Da z und ω zugleich o sind, so hat man daselbst keine Constante hinzuzufügen. Weil aber nach § 3 $Cos\, z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$ ist, so haben wir, gleichfalls ohne Constante: $2 \int \frac{dz}{e^z + e^{-z}} = \omega$. Nun aber giebt Schlömilch in seinem Compendium der höhern Analysis, 1862, I, pag. 311 an, dass $\int \frac{dz}{e^z + e^{-z}} = arc\,.\, tg\, e^z. + C$ ist, wo dadurch, dass das Integral für $z = o$ verschwinden muss, sich die Constante $C = -\frac{\pi}{4}$ ergiebt. Demnach ist $\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2} =$ $ar\ tg\ e^z$ oder $tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}\right) = e^z$, d. h. $z = Log\,.\, tg\left(45^0 + \frac{\omega}{2}\right)$, wodurch wir eine Bestätigung von § 4, Nr. 4 erlangen.

§ 23.

In den Amsterdamer Verhandelingen von 1862, VIII, pag. 231 Nr. 7 giebt Herr Dr. Bierens de Haan an:

$$A = \int \frac{\sin x\, dx}{\cos 2x} = \frac{1}{2\sqrt{2}} Log \frac{1 + \sqrt{2} \cos x}{1 - \sqrt{2} \cos x} \text{ und } B = \int \frac{\cos x\, dx}{\cos 2x} = \frac{1}{2\sqrt{2}} Log \frac{1 + \sqrt{2} \sin x}{1 - \sqrt{2} \sin x}.$$

Mit Hülfe von § 8, Nr. 3 kann man die Integrale bequemer also ausdrücken:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} Ar\ Tg\, (\sqrt{2}\,.\, \cos x) \text{ und } B = \frac{1}{\sqrt{2}} Ar\,.\, Tg\, (\sqrt{2}\,.\, \sin x).$$

Aber auch folgende Ausdrücke sind richtig:

$$A = \frac{1}{2\sqrt{2}} Log \frac{\sqrt{2}\,.\, \cos x + 1}{\sqrt{2}\,.\, \cos x - 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} Ar\ Cotg\, (\sqrt{2}\,.\, \cos x), B = \frac{1}{2\sqrt{2}} Log \frac{\sqrt{2}\,.\, \sin x + 1}{\sqrt{2}\,.\, \sin x - 1} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} Ar\,.\, Cotg\, \sqrt{2} \sin x.$$

Hätte Herr B. de Haan an dieser Stelle sich der hyperbolischen Functionen bedient, so glaube ich, würde das, was er über die beiden Integrale, wenn sie von $x = -a$ bis $x = +a$ genommen werden, gesagt hat, klarer ausgefallen sein.

Den vorigen Formeln analog sind $A' = \int \frac{Sin\, x\, dx}{Cos\, 2x}$ und $B' = \int \frac{Cos\, x\, dx}{Cos\, 2x}$.

Um diese beiden Integrale zu finden, beachte man, dass $Cos\, 2x = Cos\, x^2 + Sin\, x^2$ $= 1 + 2\, Sin\, x^2 = 2\, Cos\, x^2 - 1$ und dass $d\, Cos\, x = Sin\, x\, dx$ und $d\, Sin\, x =$ $Cos\, x\, dx$ ist. Setzt man nun zunächst $\sqrt{2}\, Cos\, x = u$, so hat man

$$\left\{\begin{array}{l} A' = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{du}{u^2-1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,Ar.Cotg\,u = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,Cotg\,(\sqrt{2}.\,Cos\,x), \text{ (nach § 8. Nr. 4.)} \\ \text{Da aber } \int\frac{du}{u^2-1} = -\int\frac{du}{1-u^2} \text{ ist, so giebt § 8, Nr. 3 ausserdem noch} \\ A' = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,Ar.Tg\,(\sqrt{2}.\,Cos\,x). \end{array}\right.$$

Setzt man ferner $\sqrt{2}.\,Sin\,x = v$, so erhält man zunächst

$$\left\{\begin{array}{l} B' = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dv}{1+v^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\,ar.tg\,v = \frac{1}{\sqrt{2}}.\,ar.tg\,(\sqrt{2}.\,Sin\,x). \\ \text{Weil aber } \int\frac{dv}{1+v^2} = -\int-\frac{dv}{1+v^2} = -\,ar.cotg\,v \text{ ist, so hat man ausserdem noch} \\ B' = -\frac{1}{\sqrt{2}}.\,ar.cotg\,(\sqrt{2}\,Sin\,x). \end{array}\right.$$

§ 24.

So wie 1) $\int\frac{dx}{1+\cos x} = tg\,\frac{1}{2}\,x$ und 2) $\int\frac{dx}{1-\cos x} = -\,cotg\,\frac{1}{2}\,x$ ist, so erhalten wir durch § 6, Nr. 3 und Nr. 4, wenn wir beachten, dass $Sin\,\frac{1}{2}\,x = \sqrt{\frac{Cos\,x-1}{2}}$ und $Cos\,\frac{1}{2}\,x = \sqrt{\frac{Cos\,x+1}{2}}$ ist.

$$\text{I) } \int\frac{dx}{Cos\,x+1} = Tg\,\tfrac{1}{2}\,x, \quad \text{II) } \int\frac{dx}{Cos\,x-1} = -\,Cotg\,\tfrac{1}{2}\,x.$$

§ 25.

Unter Andern hat Herr Dr. Bjorling in Grunert's Archiv 21, pag. 26, das $\int\frac{dx}{a+b\cos x+c\sin x} = A$ behandelt. Indem er $c = o$ annimmt, spricht er zunächst von $\int\frac{dx}{a+r\cos x} = B$. Er setzt $\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = tg\,\frac{1}{2}\,x = u$ und erhält $dB = \frac{2\,du}{(a+r)+(a-r)u^2}$. Ist nun $a^2 > r^2$, so erlangt er leicht, wenn man nämlich noch v für $u\sqrt{\frac{a-r}{a+z}}$ schreibt,

$$\text{1) } B = \pm\frac{2}{\sqrt{a^2-r^2}}\int\frac{dv}{1+v^2} = \pm\frac{2}{\sqrt{a^2-r^2}}\,ar.tg\left(\sqrt{\frac{a-r}{a+r}}\,tg\,\tfrac{1}{2}\,x\right),$$

je nachdem a positiv oder negativ ist.

Ist aber $r^2 > a^2$, so erhält er, wenn man v für $u\sqrt{\frac{r-a}{r+a}}$ schreibt,

$$B = \frac{2}{\sqrt{r^2-a^2}}\int\frac{dv}{1-v^2} = \frac{1}{\sqrt{r^2-a^2}}\,Log\,\frac{1+v}{1-v} = \frac{1}{2\sqrt{r^2-a^2}}\,Log\left(\frac{1+v}{1-v}\right)^2,$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{r^2-a^2}}\,Log\left[\frac{1+\sqrt{\frac{r-a}{r+a}}\,tg\,\frac{1}{2}\,x}{1-\sqrt{\frac{r-a}{r+a}}\,tg\,\frac{1}{2}\,x}\right]^2$$

Da aber $\int\frac{dv}{1-v^2} = Ar.Tg\,v$ und $\int-\frac{dv}{v^2-1} = Ar.Cotg\,v$ ist, so gelange ich zu folgenden Resultaten:

I) $B = \frac{2}{\sqrt{r^2-a^2}}\,Ar.Tg\left(\sqrt{\frac{r-a}{r+a}}\,tg\,\frac{1}{2}\,x\right)$ oder $= \frac{2}{\sqrt{r^2-a^2}}\,Ar.Cotg\left(\sqrt{\frac{r-a}{r+a}}\,tg\,\frac{1}{2}\,x\right)$, je nachdem $\sqrt{\frac{r-a}{r+a}}\,tg\,\frac{1}{2}\,x$ kleiner oder grösser als 1 ist.

Der dritte Fall, wenn $a^2 = r^2$ ist, hat in § 24 Nr. 1 und 2 seine Erledigung gefunden.

Um A zu finden, setze man $b = r \cdot \cos\alpha$, $c = r \cdot \sin\alpha$, also $r = \sqrt{b^2 + c^2}$. Dadurch wird $A = \int \frac{dx}{a + r \cdot \cos(x - \alpha)} = \int \frac{dy}{a + r\cos y}$, wenn $x - \alpha = y$;

Ist daher $a^2 > b^2 + c^2$, so hat man:

$$2)\ A = \pm \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}\, ar \cdot tg \left(\sqrt{\frac{a-r}{a+r}} \cdot tg\, \frac{x-\alpha}{2}\right).$$

Ist aber $b^2 + c^2 > a^2$, dann giebt Herr Björling an:

$$A = \frac{1}{2\sqrt{b^2 + c^2 - a^2}}\, Log \left[\frac{1 + \sqrt{\frac{r-a}{r+a}}\, tg\, \frac{x-\alpha}{2}}{1 - \sqrt{\frac{r-a}{r+a}}\, tg\, \frac{x-\alpha}{2}}\right]^2,$$

wofür ich schreibe:

$$\text{II)} \begin{cases} A = \frac{2}{\sqrt{b^2 + c^2 - a^2}}\, Ar \cdot Tg \left(\sqrt{\frac{r-a}{r+a}}\, tg\, \frac{x-\alpha}{2}\right) \\ A = \frac{2}{\sqrt{b^2 + c^2 - a^2}}\, Ar \cdot Cotg \left(\sqrt{\frac{r-a}{r+a}}\, tg\, \frac{x-\alpha}{2}\right) \end{cases}$$

je nachdem die Klammer kleiner oder grösser als 1 ist.

Im dritten Falle, nämlich wenn $a^2 = b^2 + c^2$ ist, haben wir:

$A = \frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2}}\, tg\, \frac{x-\alpha}{2}$ oder $= \frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2}}\, cotg\, \frac{x-\alpha}{2}$,

je nachdem $a = +\sqrt{b^2 + c^2}$ oder $a = -\sqrt{b^2 + c^2}$ ist.

§ 26.

In Bezug auf $\int \frac{dx}{a + r\, Cos\, x} = J$ könnte ich ohne Weiteres auf Gudermann's Werk § 97 verweisen; doch will ich auch dieses Integral, da es in Kürze geschehen kann, nach Anleitung des vorigen § selbst entwickeln. Man setze $u = \sqrt{\frac{Cos\, x - 1}{Cos\, x + 1}}$ $= Tg\, \frac{1}{2}\, x$, dann ist $Cos\, x = \frac{1 + u^2}{1 - u^2}$, $du = \frac{dx}{2\, Cos\, \frac{1}{2} x^2} = \frac{dx}{Cos\, x + 1}$, da aber $Cos\, x + 1$ $= \frac{2}{1 - u^2}$, so ist $dx = \frac{2\, du}{1 - u^2}$, mithin

$$J = 2 \int \frac{du}{(r + a) + (r - a)\, u^2} = J' \text{ und } J = 2 \int \frac{du}{(a + r) - (a - r)\, u^2} = J'',$$

je nachdem r grösser oder kleiner als a ist.

Im ersten Fall, wo also $r^2 > a^2$ ist, erhält man:

$J' = \frac{2}{\sqrt{r^2 - a^2}}\, ar \cdot tg \left(\sqrt{\frac{r-a}{r+a}}\, Tg\, \frac{1}{2}\, x\right)$ oder $J' = -\frac{2}{\sqrt{r^2 - a^2}} \cdot ar \cdot cotg \left(\sqrt{\frac{r-a}{r+a}}\, Tg\, \frac{1}{2}\, x\right)$

Der andere Fall, wo also $a^2 > r^2$ ist, giebt:

$J'' = \frac{2}{\sqrt{a^2 - r^2}}\, Ar \cdot Tg \left(\sqrt{\frac{a-r}{a+r}} \cdot Tg\, \frac{1}{2}\, x\right)$ oder $= \frac{2}{\sqrt{a^2 - r^2}}\, Ar \cdot Cotg \left(\sqrt{\frac{a-r}{a+r}}\, Tg\, \frac{1}{2}\, x\right)$.

Die zweite Form von J'' wird zur Anwendung kommen können, wenn a oder r negativ ist.

Den dritten Fall, wonach $a^2 = r^2$ ist, habe ich schon in § 24, Nr. I und II zur Sprache gebracht.

Es ist noch besonders darauf aufmerksam zu machen, dass in § 25 und in § 26 die cyklischen und hyperbolischen Aren in allen nur möglichen Verbindungen vorkommen.

§ 27.

Wir gehen zu $\int \frac{dx}{x^4 - 1} = A$ und $\int \frac{dx}{x^4 + 1} = B$ über.

Bisher schrieb man: $A = \frac{1}{4} Log \frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{2} ar\,tg\,x = \frac{1}{8} Log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 - \frac{1}{2} ar\,tg\,x$.
Da aber $\frac{1}{x^4 - 1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x^2+1}\right]$, da ferner $\int \frac{dx}{x^2-1} = - Ar\,Tg\,x = - Ar\,Cotg\,x$ und $\int \frac{dx}{x^2+1} = ar\,tg\,x = -\,ar.cotg\,x$ ist, so haben wir jetzt:

$$A = -\tfrac{1}{2}\left[ar\,tg\,x + Ar\,Tg\,x\right] = \tfrac{1}{2}\left[ar.cotg\,x - Ar.Cotg\,x\right],$$

je nachdem x kleiner oder grösser als 1 ist.

Was das andere $\int \frac{dx}{x^4+1} = B$ anbelangt, so äusserte sich Leibnitz (Acta Erud. 1702, pag. 218 und 219) darüber noch folgender Massen: Esto $\frac{1}{x^2 + i a^2}$ (wo $i = \sqrt{-1}$), ducendum in $\frac{1}{x^2 - i a^2}$, prodibit $\frac{1}{x^4 + a^4}$, cujus denominator utique est formula realis, sed resolvendo hanc formulam non pervenitur ad divisores planos reales. Nam $x^2 - i a^2$ resolvi potest in $x + a\sqrt{i}$ et $x - a\sqrt{i}$ et $x^2 + i a^2$ in $x + a\sqrt{-i}$ et $x - a\sqrt{-i}$... Sed quamcunque instituamus duarum ex his radicibus quatuor combinationem, nunquam consequemur, ut duae invicem ductae dent quantitatem realem ... Itaque $\int \frac{dx}{x^4 + a^4}$ neque ex Circuli neque ex Hyperbolae Quadratura per Analysin hanc nostram reduci potest, sed novam sui generis fundat. Et optarem ... constare cuinam problemati respondeant $\int \frac{dx}{x^4 + a^4}$, $\int \frac{dx}{x^8 + a^8}$, etc. (Im Vorbeigehen sei noch bemerkt, dass der Bericht hierüber in Montucla, Histoire des Mathématiques, III. 1802, pag. 147, nicht ganz genau ist, er lautet: Jci Leibnitz se fait une question. Il se demande, si de même que l'intégration de $\int \frac{dx}{a^4 + x^4}$ dépend de la quadrature du cercle et de l'hyperbole, il en est de même de différentielles comme celle-ci en général $\frac{dx}{a^m + x^m}$, quelque soit m. Dagegen steht pag. 151: On a remarqué ci-devant que Leibnitz avait été embarassé à la réduction des fractions de cette forme $x^4 \pm a^4$ ou plus généralement $x^n \pm a^n$, en leurs facteurs de deux dimensions et qu'il avait même soupçonné que cela ne se pouvait pas toujours.)

Jetzt weiss Jeder, dass $(x^2 + x\sqrt{2} + 1).(x^2 - x\sqrt{2} + 1) = x^4 + 1$ und dass $\frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\frac{x + \sqrt{2}}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} - \frac{x - \sqrt{2}}{x^2 - x\sqrt{2} + 1}\right]$ ist. Setzt man nun $x + \frac{1}{2}\sqrt{2} = y$ und $x - \frac{1}{2}\sqrt{2} = \eta$, so wird der erste Bruch in der Klammer $= \frac{y + \frac{1}{2}\sqrt{2}}{y^2 + \frac{1}{2}}$ und der zweite Bruch $= \frac{\eta - \frac{1}{2}\sqrt{2}}{\eta^2 + \frac{1}{2}}$.

$$\text{Darnach ist } B = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\tfrac{1}{2}\int \frac{2y\,dy}{y^2 + \frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}\int \frac{2\eta\,d\eta}{\eta^2 + \frac{1}{2}} + \int \frac{dy\sqrt{2}}{1 + 2y^2} + \int \frac{d\eta\sqrt{2}}{1 + 2\eta^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\tfrac{1}{2} Log \frac{y^2 + \frac{1}{2}}{\eta^2 + \frac{1}{2}} + ar\,tg\,y\sqrt{2} + ar\,tg\,\eta\sqrt{2}\right].$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\tfrac{1}{2} \, Log \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + ar\,tg \frac{x\sqrt{2}}{1 - x^2}\right], \text{ weil } tg\,(\varphi + \varphi') = \frac{tg\,\varphi + tg\,\varphi'}{1 - tg\,\varphi \cdot tg\,\varphi'}$$

ist. In dieser Gestalt liess man bis jetzt das Integral.

Es ist aber $\tfrac{1}{2}\, Log \frac{x^2 + 1 + x\sqrt{2}}{x^2 + 1 - x\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2}\, Log \frac{1 + \frac{x\sqrt{2}}{x^2+1}}{1 - \frac{x\sqrt{2}}{x^2+1}} = \tfrac{1}{2}\, Log \frac{1+u}{1+u}$,

wenn $u = \frac{x\sqrt{2}}{x^2+1}$ genommen wird.

Da nun $\tfrac{1}{2}\, Log \frac{1+u}{1-u} = Ar\,Tg\,u$ ist, so kann man gegenwärtig schreiben:

$$\int \frac{dx}{x^4 + 1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[Ar\,Tg \frac{x\sqrt{2}}{1+x^2} + ar\,tg \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right].$$

Ich bemerke noch, dass man bei diesem Integral B nie seine Zuflucht zu der hyperbolischen Cotangente nehmen darf, da $\frac{x\sqrt{2}}{1+x^2}$ stets kleiner als 1 ist.

Beispiel zu $\int \frac{dx}{x^4 - 1}$.

Es sei das Integral zu nehmen von $x = 1\tfrac{1}{2}$ bis $x = 1{,}68473$ und betrage innerhalb dieser Grenzen S. Sonst hatte man zur Berechnung die Formel: $\tfrac{1}{4}\, Log \frac{x-1}{x+1} - \tfrac{1}{2}\, ar\,tg\,x$, jetzt möchte vorzuziehen sein: $-\tfrac{1}{2}\left[ar\,tg\,x + Ar\,Cotg\,x\right]$. Wir wollen den Werth des Integrals erst für die obere Grenze $x = 1.68473$ berechnen und mit S' bezeichnen.

Gemeinschaftlicher Theil der Rechnung:	Sonst:	Jetzt:	Anmerk.
$\log x = 0.22653$	9,83551	$A' = 0.29669$	$\Pi = \frac{\pi}{180.60.60}$
$a'' = 59^0\,18'\,29''$	9,42890	$A = 0.68317$	$\log M = 9.63778.$
$\log a'' = 5{,}32942$	9,40662 }	$a = 1.0351$	
$\log \Pi = 4{,}68557$	$-$ 0,59338 } $= \log \frac{x-1}{x+1}$	1.71827	
0.01499	$-$ 1.36635 $= Log \frac{x-1}{x+1}$	$S' = -$ 0.85913.5	
$a = 1.0351$	$-$ 0.34159		
$\frac{a}{2} = 0.51755$	$-$ 0.51755		
	$-$ 0.85914 $= S'$		

Der Werth des Integrals für die untere Grenze $x = 1\tfrac{1}{2}$ beträgt

$S'' = -$ 0.89375. Da nun $S = S' - S''$ ist, so haben wir:

$S = +$ 0.03461.

Beispiel zu $\int \frac{dx}{x^4 + 1}$.

Auch dieses Integral sei von $x = 1\tfrac{1}{2}$ bis $x = 1{,}68473$ zu nehmen und betrage S.

Berechnung seines Werthes (S') für die obere Grenze:

Gemeinschaftlicher Theil:	**Sonst:**	**Jetzt:**
$1 - x^2 = -1.8383$	$\log x^2 = 0{,}45306$	$(\log x\sqrt{2} = 0.37704.5)$
$(0{,}26442)$	$x^2 = 2{,}8383$	$\log(1 + x^2) = 0.58413.6$
$\log x\sqrt{2} = 0.37704.5$	$x\sqrt{2} = 2{,}3825$	$\log Tg\, A = 9{,}79291$
$\log tg\, a = 0{,}11262$	$\dfrac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} = \dfrac{6{,}2208}{1{,}4558}$	$A' = 0.31538$
$a'' = \pi - 52^0\, 20'\, 48''$	$\log(\text{Zähler}) = 0.79385$	$\log A' = 9.49883$
$3{,}14159$	$\log(\text{Nenner}) = 0.16310$	$\log A = 9.86105$
0.91361	$\log.(\text{Bruch}) = 0.63075$	$(\log 2\sqrt{2} = 0.45154)$
$a = 2{,}22798$	$\log.\log.(\text{Br.}) = 9.79985$	9.40951
$\log a = 0.34792$	$\log.Log\,(\text{Br.}) = 0.16207$	0.25675
$\log 2\sqrt{2} = 0.45154$	$\log 4\sqrt{2} = 0.75257$	
9.89638	9.40950	
$+\,0.78773$	0.25674	
Dazu $+\,0{,}25674$		
$S' = 1{,}04447$		

Wenn nun für die untere Grenze der Werth des Integrals $= S''$ ist, so erhält man $S = 1{,}04447 - S''$.

§ 28.

In Grunert's Archiv, 3, pag. 336 hat Clausen eine einfache Entwicklung des schon von Legendre behandelten Integrals $\int \frac{y\,dy}{(y^3 + 8)\sqrt{y^3 - 1}} = S$ gegeben, wonach

$$S = \frac{1}{12\sqrt{3}}\, Log\, \frac{\sqrt{y^2+y+1} + \sqrt{y-1}\,.\,\sqrt{3}}{\sqrt{y^2+y-1} - \sqrt{y-1}\,.\,\sqrt{3}} + \frac{1}{18}\, arc\,.\,tg\, \frac{3\,y\,.\,(y-1)}{(4-y)\sqrt{y^3-1}}.$$

Da nun der grosse Bruch $= \dfrac{1 + \dfrac{\sqrt{y-1}\,.\,\sqrt{3}}{\sqrt{y^2+y+1}}}{1 - \dfrac{\sqrt{y-1}\,.\,\sqrt{3}}{\sqrt{y^2+y+1}}} = \dfrac{1 + \dfrac{\sqrt{3}\,.\,(y-1)}{\sqrt{y^3-1}}}{1 - \dfrac{\sqrt{3}\,.\,(y-1)}{\sqrt{y^3-1}}}$ ist, so erhalten wir nach § 8, Nr. 3:

$$S = \frac{1}{6\sqrt{3}}\, Ar\,.\,Tg\, \frac{(y-1)\sqrt{3}}{\sqrt{y^3-1}} + \frac{1}{18}\, ar\,.\,tg\, \frac{(y-1)\,.\,3\,y}{(4-y)\sqrt{y^3-1}}.$$

Insofern $y > 1$ ist, wird $\frac{(y-1)\sqrt{3}}{\sqrt{y^3-1}}$ stets < 1 sein.

Setzt man $y = 1{,}68473$, so ist

$$S = 0{,}068195 + 0{,}036406 + Const.$$

Anwendungen der neuen Tafeln.

§ 29.

Bei der Aufgabe: „Unter welchem Winkel muss eine Kugel im luftleeren Raum geworfen werden, damit, nachdem sie wieder in die anfängliche horizontale Lage gekommen ist, der beschriebene Parabelbogen ein Maximum sei?" kommt Herr Director Dr. Strehlke nach einer mündlichen Mittheilung*) auf folgende Gleichung: $\sin\omega \,.\, Log\, tg\left(45^0 + \frac{\omega}{2}\right) = 1$, wofür ich schreibe: $z \,.\, \sin\omega = 1$, oder $z' \sin\omega = M = Modulus.$ $(\log M = 9{,}63778.431)$.

1) Berechnung des Winkels ω nach meinen Tafeln, pag. 87.

Für $\omega = 56^0\ 27'$.	Für $\omega = 56^0\ 28'$	
$\log\sin\omega = 9{,}92086$	$\log\sin\omega = 9{,}92094$	$29 : 27 = 60'' : \underline{56''}$.
$\log z' = 9{,}71665$	$\log z' = 9{,}71686$	
$(z' = 0{,}52080)$ 9,63751	$(z' = 0.52103)$ 9,63780	

Also ist $\omega = 56^0\ 27'\ 56''$.

2) Nach Herrn Forti's Tafeln: pag. $\frac{1}{2}\tau = 28^0$.

Für $\frac{1}{2}\tau = 28^0\ 13' = \frac{1}{2}\omega$.	Für $\frac{1}{2}\tau = 28^0\ 14' = \frac{1}{2}\omega$	
$\log tg\,\varphi = \log\sin\omega = 9.92077$	$\log tg\,\varphi = \log\sin\omega = 9{,}92094$	$55 : 54 = 60'' : \underline{59''}$.
$(2\, sett.\, h = 1.19865 = z)$	$(2\, sett.\, h = 1.19970 = z)$	
$\log z = 0.07869$	$\log z = 0.07907$	
9.99946	0.00001	

Also ist $\frac{1}{2}\tau = 28^0\ 13'\ 59''$ oder $\omega = 56^0\ 27'\ 58''$.

3) Mit Shortrede's und Schrön's Tafeln:

$$\log.\sin\omega + \log.\log tg\,(45^0 + \tfrac{1}{2}\omega) = \log.M.$$

Für $\omega = 56^0\ 27'\ 56''$.	Für $\omega = 56^0\ 27'\ 57''$.
9,92093.37	9,92093,51
9.71684.61	9.71684.92
9.63777.98	9.63778.43

Also durch siebenstellige Tafeln berechnet ergiebt sich $\omega = 56^0\ 27'\ 57''$.

§ 30.

Aufgabe. Man soll die Oberfläche (0) eines durch Rotation entstandenen Ellipsoids finden.

*) Wir haben in einem der nächsten Hefte des Grunert'schen Archivs von dieser Aufgabe des Herrn Dir. Strehlke eine Auflösung zu erwarten.

Auflösung. Wenn die Drehung um die Axe der x geschehen ist, so ist bekanntlich das Differenzial einer solchen Oberfläche $= 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \,.\, dx$, und da die Gleichung der erzeugenden Ellipst ist: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, so ist

$$O = \frac{2\pi b}{a^2} \int \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)\, x^2} \,.\, dx + C,$$

wenn das Integral von $x = o$ bis $x = a$ genommen und das Resultat verdoppelt wird.

1) Ist nun $a > b$, so haben wir zur Berechnung einer Zone (l) des dieser Annahme entsprechenden länglichen Ellipsoids (L) folgende Formeln (§ 9, e):

$$l = \frac{b\pi}{a^2 e}\left[e\, x \,.\, \sqrt{a^4 - e^2 x^2} + a^4 \,.\, \alpha\right], \text{ wo } a^2 - b^2 = e^2 \text{ und } \sin \alpha = \frac{ex}{a^2} \text{ ist,}$$

$$\text{oder } l = \frac{a^2 \,.\, b \,.\, \pi}{e}\left[\sin \alpha \,.\, \cos \alpha + \alpha\right],$$

woraus sich

$$L \left\{ \begin{array}{l} = 2 b^2 \pi + 2 a^2 \pi \left[\left(ar \sin \frac{e}{a}\right) : \frac{e}{b}\right] \\ = 2 b^2 \pi + 2 a^2 \pi \left[\left(ar\ tg\ \frac{e}{b}\right) : \frac{e}{b}\right] \end{array} \right\} = h + H \,.\, k$$

ergiebt, wenn $h = 2b^2\pi$ ist, $H = 2\, a^2 \pi$ und k gleich einer der beiden gleichen eckigen Klammern gesetzt wird.

2) Ist aber $a < b$, so entsteht ein abgeplattetes Ellipsoid, dessen Oberfläche (P) unter Andern von Schnuse (Die Grundlehren der höhern Analysis, 1849, pag. 80) nach folgender für eine beliebige Zone desselben (p) geltenden Formel berechnet wird:

$$p = \frac{\pi\, b^2 c}{a^2}\left[x \sqrt{\frac{a^4}{b^2 c^2} + x^2} + \frac{a^4}{b^2 c^2} \operatorname{Log}\left(\frac{x + \sqrt{\frac{a^4}{b^2 c^2} + x^2}}{\frac{a^2}{bc}}\right)\right], \text{ wo } c^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} \text{ ist.}$$

Für diese letztere Formel wollen wir uns eine einfachere vermittelst der hyperbolischen Funktionen entwickeln. Wir haben in diesem Falle zu finden:

$$\frac{2\pi b}{a^2}\int \sqrt{a^4 + e^2 x^2}\, dx + C = p, \text{ wo jetzt } e^2 = b^2 - a^2 \text{ ist.}$$

Nun ist (nach § 9, Nr. 5) $\int d\xi \,.\, \sqrt{1 + \xi^2} = \frac{\xi \,.\, \sqrt{1 + \xi^2}}{2} + \frac{Ar \,.\, Sin\, \xi}{2}$.

Setzen wir $\xi = \frac{ex}{a^2}$, also $d\xi = \frac{e}{a^2}\, dx$, so ist:

$$\int \sqrt{a^4 + e^2 x^2}\, dx = \frac{1}{e}\left[\frac{ex}{2}\sqrt{a^4 + e^2 x^2} + \frac{a^4}{2} \,.\, A\right], \text{ wo } Sin\, A = \frac{ex}{a^2},$$

mithin $p = \frac{b \,.\, \pi}{a^2 \,.\, e}\left[e\, x \sqrt{a^4 + e^2 x^2} + a^4 A.\right]$.

Da aber $ex = a^2\, Sin\, A$ und $\sqrt{a^4 + e^2 x^2} = a^2\, Cos\, A$ ist, so können wir auch schreiben: $p = \frac{a^2 b \,.\, \pi}{e}\left[Sin\, A \,.\, Cos\, A + A\right]$.

Weil das Integral für $x = o$ verschwindet, so geben die beiden letzten Ausdrücke für $x = a$ ohne Weiteres die halbe Oberfläche, daher ist die ganze Oberfläche des abgeplatteten Ellipsoids:

$$\left.\begin{array}{l} P = 2 b^2 \pi + 2 a^2 \pi \left[\left(Ar \,.\, Sin\, \frac{e}{a}\right) : \frac{e}{b}\right] \\ \text{oder } P = 2 b^2 \pi + 2 a^2 \pi \left[\left(Ar \,.\, Tg\, \frac{e}{b}\right) : \frac{e}{b}\right] \end{array}\right\} = H + h \,.\, K,$$

wo K gleich einer der beiden letzten eckigen Klammern ist und wo $H\ (= 2b^2\pi)$ und $h\ (= 2a^2\pi)$ im Wesentlichen dieselbe Bedeutung haben, wie beim länglichen Ellipsoid.

Der bessern Vergleichung wegen wollen wir aber auch beim abgeplatteten Ellipsoid die grössere Halbaxe mit a und die kleinere Halbaxe mit b bezeichnen. Dann haben wir uns die Drehung um b, als die Axe der y zu denken und in den beiden letzten Formeln für P nur die Buchstaben a und b zu vertauschen. Es ist dann:

$$L = 2b^2\pi + 2a^2\pi\left[\left(ar\,.\,sin\,\frac{e}{a}\right) : \frac{e}{b}\right] = h + H.k.$$

$$P = 2a^2\pi + 2b^2\pi\left[\left(Ar\,.\,Sin\,\frac{e}{b}\right) : \frac{e}{b}\right] = H + h.K.$$

Beispiel.

Bei der Erde ist $a = 859{,}4364$ und $b = 856{,}5636$ Meilen, daher hat man: $e = 70{,}212$, $log\,\frac{e}{a} = 8{,}91220$, $log\,\frac{e}{b} = 8{,}91365$, $2b^2\pi = 4610000 = h$ und $2a^2\pi = 4640900 = H$.

$ar'' = 4^0\ 41'\ 10''$	$Ar' = 0.035559$	Bei Rechnung mit siebenstelligen Tafeln habe ich gefunden:
$log\ ar'' = 4{,}22712$	$log.\,Ar' = 8{,}55095$	$L = 9240584$ Quadratmeilen.
$log\ H = 4{,}68557$	$log\ M = 9{,}63778$	$P = 9261235$ Quadratmeilen.
$log\ ar = 8{,}91269$	$log\ Ar = 8{,}91317$	
$log\ k = 9{,}99904$	$log\ K = 0.00097$	
$H.k = 4630600$	$h.K = 4620300$	
$L = 9240600.$	$P = 9261200.$	

§ 31.

Nach Herrn Dr. Zetzsche (Schlömilchs Zeitschrift V. pag. 169) würde das Trägheitsmoment (T) einer Parabellinie (s), welche sich um die Parabelaxe dreht, mit Uebergehung gewisser Factoren μ und f, welche hier nicht in Betracht kommen, durch folgenden Ausdruck gefunden werden:

$$T = \frac{p^2 + 4pz}{8}\sqrt{2pz + 4z^2} - \frac{p^3}{16}\,Log\left(\frac{p + 4z + 2\sqrt{2pz + 4z^2}}{p}\right),$$

wenn man unter $2p$ den Parameter und unter z die Grenzabscisse versteht.*)

Nun ist $T = \int r^2\,ds$, wo $r^2 = 2pz$ und $ds = dz\,.\sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2} = dz\,.\frac{\sqrt{r^2 + p^2}}{r}$.

Daher ist $T = p\int_0^z \sqrt{2pz + 4z^2}\,dz$, d. h. mit Hilfe von § 17, Nr. II hat man:

$$T = p\left[\frac{p + 4z}{8}\sqrt{2pz + 4z^2} - \frac{p^2}{16}\,Ar\,.\,Cos\left(\frac{p + 4z}{p}\right)\right], \text{ oder}$$

$$T = \frac{p^2 z}{4}\,Cos\,A\,.\,Cotg\left(\frac{A}{2}\right) - \frac{p^3}{16}\,.\,A, \text{ wo } Cos\,A = \frac{p + 4z}{p} \text{ ist.}$$

Ein Zahlenbeispiel für $2p = 8{,}1479$ und die Grenzabscisse $z = 10{,}9783$ habe ich in der „Beilage" zu meinen Tafeln, December 1863, pag. 4, berechnet, wonach $T = 1277{,}27$ ($= 1363{,}2 - 85{,}931$) ist.

*) An der bezeichneten Stelle fehlt beim ersten Theile der Formel für T, gewiss nur in Folge eines Druckfehlers, die Wurzelgrösse.

§ 32.

Aufgabe. Die Länge eines parabolischen Bogens (B) zu finden, dessen Parameter $= 2p$ und dessen Abcisse $= x$ ist.

Auflösung. Bekanntlich ist $B = \int_0^x dx . \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, oder da $y^2 = 2px$ ist, so ist:

$B = \frac{1}{2} \int \frac{dx . \sqrt{2px + 4x^2}}{x}$, und mit Benutzung von § 17, I hat man:

$B = \frac{1}{2} \sqrt{2px + 4x^2} + \frac{p}{4} Ar . Sin . vers \frac{4x}{p} = \frac{1}{2} \sqrt{2px + 4x^2} + \frac{p}{2} Ar . Cotg \frac{\sqrt{2px + 4x^2}}{2x}$

$= \frac{1}{2} \sqrt{y^2 + (2x)^2} + \frac{p}{4} Ar . Cos \frac{p + 4x}{p} = \frac{1}{2} t + \frac{p}{2} A,$

wo t die Tangente des Parabelpunktes ist, dessen Coordinaten x und y sind, und wo $A = Ar . Cotg \frac{t}{2x}$ oder $Tg A = \frac{2x}{t}$ ist. Eine Constante ist nicht nöthig hinzuzufügen, da für $x = o$ sowohl t wie auch $A = o$ sind.

Nach dieser letzten einfachen Formel habe ich in der schon erwähnten „Beilage“ pag. 3 ein von Montucla (III, pag. 151) gegebenes Beispiel, wonach $2p = 1$ und $x = 2$ ist, berechnet und gefunden:

$$B = 2{,}12132 + 0{,}44070 = 2{,}56202,$$

während Montucla durch seine im ersten Theil nicht ganz richtige Formel:

$$B = \frac{x}{2} \sqrt{2p + 4x} + \frac{p}{2} Log \left(\frac{2x^{\frac{1}{2}} + \sqrt{2p + 4x}}{\sqrt{2p}}\right) \text{ erhält:}$$

$$B = 3 + 0{,}4406964 = 3{,}4406964.$$

Fig. 2. Herr Director Strehlke findet nach einer mündlichen Mittheilung die Länge eines Parabelbogens $AC = B$ durch folgende elegante Construction: An die Parabel AC, deren Scheitel A, deren Axe AG und deren Halbparameter $p = AB$ ist, legt er eine gleichseitige Hyperbel BD, deren Mittelpunkt sich in A und deren Scheitel sich in B befindet. Dann zieht er zur Axe aus C eine Parallele bis zum Hyperbelpunkte D, hierauf DJ senkrecht auf AJ und noch AD. Bezeichnet man nun den Flächeninhalt des Dreiecks AJD, welcher $= \frac{AJ . DJ}{2}$ ist, durch Δ und den Flächeninhalt des hyperbolischen Sektors ABD, welcher nach § 2 $= \frac{p^2}{2} z = \frac{p^2}{2} Ar . Sin \frac{DJ}{p}$ ist, durch S, so soll nach ihm $B . p = \Delta + S$ sein.

Um sich hievon zu überzeugen, bemerke man zuvörderst, dass nach unserer obigen Entwicklung $B . p = \frac{p . t}{2} + \frac{p^2}{2} A$ ist, wobei $Tg A = \frac{2x}{t}$. Nun ist $x = AG$, $y = CG = DJ$, auch sei $AJ = X$. Da $t^2 = y^2 + 4x^2$, so ist $p^2 t^2 = p^2 y^2 + 4x^2 p^2$, und aus $X^2 - y^2 = p^2$ folgt $X^2 . y^2 = p^2 y^2 + y^4 = p^2 y^2 + (2px)^2$. Mithin ist $\frac{p . t}{2} = \frac{X . y}{2} = \Delta$. Da ferner $Tg A = \frac{2x}{t} = \frac{2xp}{Xy} = \frac{y}{X}$ und demzufolge $Sin A = \frac{y}{p}$ ist, so erkennt man sofort, dass $\frac{p^2}{2} A = S$ ist.

§ 33.

Fig. 3. Um die Länge eines elliptischen Bogens $BM = \tau$ zu finden, kommt man bekanntlich auf folgendes Integral:

$$\tau = a . \int_0^\varphi d\varphi . \sqrt{1 - e^2 \sin \varphi^2} = a \int_0^\varphi \delta \varphi . d\varphi.$$

Dabei wird vorausgesetzt, dass die Gleichung der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, dass $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = e^2$, dass die Ordinate PM bis zum Hilfskreise nach N verlängert ist, dass der Winkel $BON = BOD = \varphi$ genannt wird, weswegen denn $\frac{x}{a} = sin\,\varphi$ ist, und dass man endlich des folgenden § wegen $\delta\,\varphi$ statt $\sqrt{1 - e^2\, sin\, \varphi^2}$ gesetzt hat (statt der gewöhnlichen Abkürzung $\varDelta\,\varphi$). Der Symmetrie mit § 34 wegen führe ich noch statt φ sein Complement $DOC = \omega$ ein, dann hat man:

$\tau = -a\int\sqrt{1 - e^2\, cos\, \omega^2}\,.\,d\,\omega = -a\int\delta\,\omega\,.\,d\,\omega$, wo $\delta\,\omega = \sqrt{1 - e^2\,.\,cos\,\omega^2}$ ist. Die weitere Integration kann ich als bekannt voraussetzen.

Für $a = 1$, $b = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$, $\varphi = 30^0$ geben Legendre's Tafeln (Exercices de Calcul intégral, Tome III, pag. 377), ohne Weiteres: $BM = \tau = 0{,}51204.93224$.

§ 34.

Aufgabe. Man soll die Länge eines hyperbolischen Bogens T, der sich vom Scheitel der Hyperbel bis zu einem Punkte erstreckt, dessen Coordinaten x und y sind, bestimmen.

1. **Auflösung.** Es ist $d\,T = \sqrt{d\,x^2 + d\,y^2}$, da nun $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, also $d\,y = \frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}\,d\,x$ und $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$ ist, so erhält man, wenn man $\frac{a^2 + b^2}{a^2} = e^2$, $\frac{x}{a} = Cos\,z$, also $\sqrt{x^2 - a^2} = a\,Sin\,z$ und $d\,x = a\,Sin\,z\,.\,d\,z$ setzt, $T = a\int\sqrt{-1 + e^2.Cos\,z^2}\,.\,d\,z = a\int\varDelta\,z\,.\,d\,z$, wo $\varDelta\,z = \sqrt{-1 + e^2.\,Cos\,z^2}$ ist.

Am einfachsten geht man nun in folgender Art weiter: Man setze $m = \frac{1}{e^2}$ und $\zeta = \frac{1}{Cos\,z}$, dann ist:

$$T = a\,e\int Cos\,z\,.\,\sqrt{1 - m\,\zeta^2}\,d\,z = a\,e\int Cos\,z\,(1 - \tfrac{1}{2}\,m\,\zeta^2 - \tfrac{1}{8}\,m^2\,\zeta^4 - \tfrac{1}{16}\,m^3\,\zeta^6 \ldots)\,.\,d\,z,$$

oder es ist, wenn man

$$d\,T = a\,e\left[Cos\,z\,d\,z - A\,.\,\frac{d\,z}{Cos\,z} - B\,.\,\frac{d\,z}{Cos\,z^3} - C\,.\,\frac{d\,z}{Cos\,z^5} - D\,\frac{d\,z}{Cos\,z^7} - F\,.\,\frac{d\,z}{Cos\,z^9} - \ldots\right]$$

schreibt, $A = \tfrac{1}{2}\,m$, $B = \tfrac{1}{8}\,m^2$, $C = \tfrac{1}{16}\,m^3$, $D = \frac{5}{128}m^4$, $F = \frac{7}{256}m^5$, $G = \frac{21}{1024}m^6$,

$$H = \frac{33}{2048}m^7,\ J = \frac{429}{32758}m^8,\ K = \frac{715}{65536}m^9,\ L = \frac{2431}{262144}m^{10}\ldots\ldots$$

Da nun $\int Cos\,z\,d\,z = Sin\,z$, $\int\frac{d\,z}{Cos\,z} = \omega$ und die andern Integrale von $\frac{d\,z}{Cos\,z^3}$, $\frac{d\,z}{Cos\,z^5}\ldots$ ohne Weiteres aus § 22 zu entnehmen sind, so haben wir:

$$T = a\,e\left[Sin\,z - \frac{Sin\,z}{Cos\,z^2}\left(\frac{B}{2} + \frac{3}{8}C + \frac{5}{16}D\ldots\right) - \frac{Sin\,z}{Cos\,z^4}\left(\frac{C}{4} + \frac{5}{24}D\ldots\right)\right.$$
$$\left. - \frac{Sin\,z}{Cos\,z^6}\left(\frac{D}{6} + \ldots\right)\ldots\ldots - \omega\left(A + \frac{B}{2} + \frac{3}{8}C + \frac{5}{16}D + \ldots\right)\right].$$

Man wird aber besser thun,

$$T = a\,e\left[\left(Sin\,z - \beta\,.\,\frac{Sin\,z}{Cos\,z^2} - \gamma\,.\,\frac{Sin\,z}{Cos\,z^4} - \delta\,.\,\frac{Sin\,z}{Cos\,z^6} - \zeta\,.\,\frac{Sin\,z}{Cos\,z^8}\ldots\ldots\right) - \alpha\,.\,\omega\right]$$

zu setzen und durch Differentiation zu ermitteln, dass

$$\alpha = A + \tfrac{1}{2}\,B + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}C + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}D + \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8}F + \ldots$$

$$\beta = \alpha - A,\ \gamma = \frac{2\,\beta - B}{3},\ \delta = \frac{4\,\gamma - C}{5},\ \zeta = \frac{6\,\delta - D}{7},\ \eta = \frac{8\,\zeta - F}{9}\ldots \text{ ist.}$$

Obgleich die erhaltene Reihe für T schlecht convergirt, so habe ich mir die Mühe nicht verdriessen lassen, darnach ein Beispiel zu berechnen. Ist $a = b$, also $e^2 = 2$ und $m = 1/2$, so ist:

$A = 0,25$	0.25	$\alpha = 0.26967,6$
$B = 0.03125$	0.01562.5	$\beta = 0.01967.6$
$C = 0.00781.25$	0.00293.0	$\gamma = 0.00270.1$
$D = 0.00244.14$	0.00023.4	$\delta = 0.00156.2$
$F = 0.00035.45$	0.00007.9	$\zeta = 0.00099.1$
$G = 0.00032.04$	0.00002.8	$\eta = 0.00078.6$
$H = 0.00012.59$	0.00001.1	
$J = 0.00005.11$	0.00000.4	
$K = 0.00002.13$	0.00000.2	
$L = 0.00000.91$	$\alpha = 0.26967.6$	

Ferner sei $x = 2\,a$, also $Cos\,z = 2$. Dann sind die subtractiven Theile der kleinen Klammer (kl.) exclusive $Sin\,z$: (Die eckige Klammer sei = Kl.)

0.00491.9	$\omega'' = 60^0 = \frac{\pi}{3}$
0.00016.9	$log\,\omega = 0.02003$
0.00002.4	$log\,\alpha = 9,43084$
0.00000.4	$\alpha . \omega = 0.28240$
0.00000.1	Kl. $= 1.4407$;
0.00511.7	log (Kl.) $= 0.15857$
kl. $= 0,99488.3$	$log . e = 0.15052$
log(kl.) $= 9.99775$	$log\,T = 0.30909$
$log Sin\,z = 0.23856$	$T = 2.0374.5$
0.23631	für $a = 1$.
Dazu . . . 1.7231	

2. **Auflösung.** In Durège's Theorie der elliptischen Functionen pag. 76, Nr. 45 findet sich für T folgende Formel:

$$T = \frac{a}{k}\,cotg\,\varphi \,.\, \delta\,\varphi - \frac{a\,k_{\prime}^2}{k}\,F(\varphi) + \frac{a\,k_{\prime}^2}{k}\,K + \frac{a}{k}\,E_{\prime}(\varphi) - \frac{a}{k}\,E.$$

Da hier $sin\,\varphi = \frac{a}{x}$, so ist $\varphi = 30^0$; ferner ist $k^2 = \frac{a^2}{a^2 + b^2} = m = 1/2$, also $k = k_{\prime} = \sqrt{1/2}$.

Nun ist (Legendre Taf. I, fol. c). Ferner:

$log\,K = 0,26812.72$ | $log\,E_{\prime}(\varphi) = 9,70931.18$, pag. 377

$log\,E = 0.13054.09$ | $log\,F(\varphi) = 9,72885.89$, pag. 378

$log\,\frac{a}{k} = 0.15051.50$	$\delta\,\varphi = \sqrt{1 - k^2\,sin\,\varphi^2} = \sqrt{7/8}$	$log\,cotg\,\varphi = 0.23856.06$
$log\,\frac{a\,k_{\prime}^2}{k} = 0.84948.50$	$log\,\delta\,\varphi = 9,97100.40$	

Demnach $T = \left.\begin{array}{ll} 2,291287 & -0,378742 \\ 1,311029 & -1,910099 \\ 0,724147 & \end{array}\right\} = 2,037622.$

3. **Auflösung.** Seite 78, Nr. 48 giebt Durège eine einfachere Formel:

$$T = \frac{a}{k}\,tg\,\psi \,.\, \delta\,\psi + \frac{a\,k_{\prime}^2}{k}\,F\,(\psi) - \frac{a}{k} \,.\, E_{\prime}(\psi).$$

Hier ist $tg\,\psi = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b}\,y$. Da nun zufolge der Hyperbelgleichung $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ sich $y = \sqrt{3}$ ergiebt, so ist $tg\,\psi = \sqrt{6}$, $sin\,\psi = \sqrt{\frac{7}{8}}$, $\delta\,\psi = \frac{2}{\sqrt{7}}$, $\psi = 67^0\,47'\,33''$.

Nach Legendre's Tafeln, pag. 379 und pag. 380, hat man:

$E_{\prime}\,(67^0) = 1,05957.35$ mit $D' = 0,01321.42$ und $D'' = -\ 7.00$,

$F\ (67^0) = 1.30019.68$ mit $D' = 0,02305.23$ und $D'' = +\ 12.28$.

Aber der durch Interpolation zu findende wahre Werth (W) ist:

$W = a + b\,.\,D' \pm \frac{b\,.\,(1 - b)}{2}\,D''$, wo a aus den Tafeln zu entnehmen ist, b ein Bruch, diesmal $= 47'\,33'' = 0^0,7925$, $b\,.\,(1 - b) = 0^0,16445$, D' die erste Differenz, D'' die

zweite Differenz ist; und da die Correction wegen der zweiten Differenz positiv wird, wenn D'' negativ ist, und negativ, wenn D'' positiv ist, so haben wir:

$F(\psi) = 1.30019.68$	$E_{,}(\psi) = 1.05957.35$	Demnach ist $T =$
$+\ 1826.89$	$+\ 1047.23$	$2,618615$
$-\ 1.01$	$+\ 58$	$+\ 0.932289$ $\} = 2.037624.$
$1.31845.56$	$1.07005.16$	$-\ 1.513280$

4. Auflösung. Ich habe noch T nach der Formel berechnet, welche Durège auf Seite 82 unter Nr. 51 giebt; sie lautet:

$$T = \frac{a}{k}\, tg\, am\, u \,.\, \delta\, am\, u + \frac{a\, k_{,}^2}{k}\, u - \frac{a}{k}\, E(u).$$

Doch setze ich hiebei voraus, dass schon $u = \int_0^\psi \frac{d\psi}{\delta\psi} = F(\psi) = 1{,}31845.56$ und $E(u) = \int_0^\psi \delta\psi \,.\, d\psi = E_{,}(\psi) = 1{,}07005.16$ anderweitig bekannt sind. Es soll also nur noch darauf ankommen, aus u zu finden $tg\, am\, u$ und $\delta\, am\, u$.

Hiezu wollen wir uns zweier Formeln bedienen, welche ich in der Vorrede zu meinen Tafeln pag. IV entwickelt habe und welche lauten:

$$tg\ am\ u = \frac{tg\, v_{,}}{\sqrt{k'}} \,.\, \frac{Tg\, L_{,}^2 + tg\, v_{,}^2}{1 + Tg\, L_{,}^2\, tg\, v_{,}^2} \,.\, \frac{Tg\, 2\, L_{,}^2 + tg\, v_{,}^2}{1 + Tg\, 2 L_{,}^2\, tg\, v_{,}^2} \ldots\ldots = \frac{tg\, v_{,}}{\sqrt{k'}}\, B \,.\, B' \,.\, B'' \ldots\ldots$$

$$\delta\ am\ u = \sqrt{k'}\ \frac{1 + Tg\, \tfrac{1}{2}\, L_{,}^2\, tg\, v_{,}^2}{Tg\, \tfrac{1}{2}\, L_{,}^2 + tg\, v_{,}^2} \,.\, \frac{1 + Tg\, \tfrac{3}{2}\, L_{,}^2 \,.\, tg\, v_{,}^2}{Tg\, \tfrac{3}{2}\, L_{,}^2 + tg\, v_{,}^2} \ldots\ldots = \sqrt{k'} \,.\, b \,.\, b'\, b'' \ldots\ldots,$$

wo leicht zu ersehen ist, was die Brüche B, $B_{,}' \ldots\ldots b, b' \ldots$ bedeuten.

Es ist $L_{,} = \frac{\pi K'}{K} = \pi$, weil aus $k = k' = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$ auch folgt, dass $K' = K$ ist,

oder $L_{,}' = M L_{,} = 1{,}36437.6$	$\tfrac{1}{2} L_{,}' = 0{,}68218.8$
$2 L_{,}' = 2{,}72875.2$	$\tfrac{3}{2} L_{,}' = 2{,}04656.4$
$3 L_{,}' = 4{,}09312.8$	$\tfrac{5}{2} L_{,}' = 3.41094.0.$
also $log\ Tg\ L_{,} = 9{,}99838$	$log\ Tg\ \tfrac{1}{2} L_{,} = 9{,}96244$
$log\ Tg\ (2 L_{,})$ schon $= 0{,}00000$	$log\ Tg\ \tfrac{3}{2} L_{,} = 9{,}99993$

Ferner ist $v_{,} = \frac{\pi}{2K} u$, also $v_{,}'' = \frac{\pi}{2K} u\, \Pi$,

d. h. $log\ v_{,} = 0.04805.82$ und $v_{,}'' = 64^0\ 0'\ 0'',4$.

Da nun $log \frac{tg\, v_{,}}{\sqrt{k'}} = 0.38708$	$log \sqrt{k'} = 9{,}92474$
$log\, B = 0{,}00200$	$log\ b = 9{,}95382$
$log\ B' = 0{,}00000$	$log\ b' = 9{,}99991$
	$log\ b'' = 0{,}00000$
so ist $log\ tg\ am\ u = log\ tg\ \psi = 0.38908$	$log\ \delta\ \psi = 9{,}87847 = log\, \delta\, am\, u,$

während nach der 3. Aufl. $log\ tg\ \psi = 0.38907.5$ und $log\ \delta\ \psi = 9{,}87848$ ist.

Die kürzeste und beste Auflösung unsers Problems wird sich erst ergeben, wenn wir einst Tafeln für $\int \Delta z \,.\, dz = H(z)$ besitzen werden, wenn auch nur in der Ausdehnung, wie wir solche für $\int \delta\varphi \,.\, d\varphi = E_{,}(\varphi)$ haben.

§ 35.

Aufgabe. Ein Körper ist entstanden durch Umdrehung von $ABCD$ um die Axe CD, wobei AEB ein Kreisquadrant mit dem Radius $AE = EB = r$ und $BCDE$ Fig. 4.

ein Rechteck mit der Länge $BC = a$ ist. Man sucht den Abstand seines auf der Linie CD befindlichen Schwerpunktes (g) von dem Punkte C.

Auflösung. Es sei $CF = x$ eine beliebige Abscisse und $FH = y$ die zugehörige Ordinate, bestehend aus $FJ = a$ und $JH = \eta$. Ferner ist $\eta^2 = x\,(2r - x)$, also $y^2 = a^2 + 2a\sqrt{2rx - x^2} + 2rx - x^2$.

Da nun im Allgemeinen $g = \dfrac{\int_0^r \pi y^2 x\,dx}{\int_0^r \pi y^2\,dx}$ ist, so haben wir hier:

$$\therefore g = \frac{\int\left(2rx^2 - x^3 + 2ax\sqrt{2rx - x^2} + a^2x\right)dx}{\int\left(2rx - x^2 + 2a\sqrt{2rx - x^2} + a^2\right)dx}.$$

Der Zähler ist:

$$= \frac{2rx^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{a^2x^2}{2} + 2a\sqrt{2rx - x^2}\left(\frac{x^2}{3} - \frac{rx}{6} - \frac{r^2}{2}\right) - 2a\,.\,r^3\,.\,ar\,tg\sqrt{\frac{2r - x}{x}}$$

und innerhalb der angegebenen Grenzen o und r:

$$= \frac{5}{12}r^4 + \frac{a^2\,.\,r^2}{2} - \frac{2a\,.\,r^3}{3} + \frac{a\,.\,r^3\pi}{2}.$$

Der Nenner ist:

$$= rx^2 - \frac{x^3}{3} + a^2x + a\,.\sqrt{2rx - x^2}\,(x - r) - 2a\,.\,r^2\,.\,ar\,tg\sqrt{\frac{2r - x}{x}},$$

also innerhalb der angegebenen Grenzen:

$$= \tfrac{2}{3}r^3 + a^2\,.\,r + \frac{a\,.\,r^2\pi}{2}.$$

Demnach ist:

$$g = \frac{5r^3 + 6a^2\,.\,r - 8a\,.\,r^2 + 6a\,.\,r^2\pi}{8r^2 + 12a^2 + 6a\,.\,r\pi}.$$

Für $r = 1 = a$ erhält man: $g = \dfrac{21{,}84954}{38{,}84954} = 0{,}56242.$

Zur Auffindung der Integrale kann man § 17, Nr. 2 und 3 benutzen.

§ 36.

Fig. 5. **Aufgabe.** Ein Körper ist durch Umdrehung der Figur $ABCD$ entstanden, von welcher der Bogen AB einer gleichseitigen Hyperbel mit der Halbaxe $r = BE$ angehört und der Theil $BCDE$ ein Rechteck mit der Länge $BC = a$ ist. Man sucht auf der Linie CD den Abstand seines Schwerpunktes (G) von C.

Auflösung. Es sei wieder $CF = x$, $FH = y = a + \eta$, wobei $\eta^2 = x\,.\,(2r + x)$ ist. Da nun $y^2 = a^2 + 2a\sqrt{2rx + x^2} + 2rx + x^2$, so ist

$$G = \frac{\int_0^r \pi y^2 x\,dx}{\int_0^r \pi y^2\,dx} = \frac{\int\left(x^3 + 2rx^2 + a^2x + 2a\,.\,x\sqrt{2rx + x^2}\right)dx}{\int\left(x^2 + 2rx + a^2 + 2a\sqrt{2rx + x^2}\right)dx}.$$

Nun ist nach § 17, III der **Zähler**:

$$= \frac{x^4}{4} + \tfrac{2}{3}rx^3 + \frac{a^2x^2}{2} + 2a\left(\frac{x^2}{3} + \frac{rx}{6} - \frac{r^2}{2}\right)\sqrt{2rx + x^2} + 2a\,.\,r^3\,.\,Ar\,Cotg\sqrt{\frac{2r + x}{x}}$$

oder innerhalb der gegebenen Grenzen $= \frac{11}{12} r^4 + \frac{a^2 . r^2}{2} + a . r^3 \; Ar . Cos \; 2,$ da $2 \; Ar \; Cotg \sqrt{3} = Ar . Cos \; 2$ und das Integral für $x = o$ selbst $= o$ ist.

Ferner ist nach § 17, II der Nenner:

$$= \frac{x^3}{3} + r x^2 + a^2 x + a \; (x + r) \sqrt{2 r x + x^2} - 2 a . r^2 . \; Ar . Cotg \sqrt{\frac{2 r + x}{x}}.$$

Eine Constante ist auch hier nicht hinzuzufügen, da der Ausdruck für $x = o$ verschwindet; für $x = r$ wird daher der Nenner:

$$= \frac{4}{3} r^3 + 2 a . r^2 \sqrt{3} + a^2 . r - a . r^2 . Ar . Cos \; 2.$$

Mithin ist

$$G = \frac{11 r^3 + 6 a^2 r + 12 a . r^2 \; Ar . Cos \; 2}{16 r^2 + 24 a . r . \sqrt{3} + 12 a^2 - 12 a . r \; Ar \; Cos \; 2}.$$

Da nun $Ar' \; Cos \; 2 = z' = 0{,}57195$, also $z = Ar . Cos \; 2 = \frac{0{,}57195}{M}$ und $log \; z = 0{,}11958$ ist, so ergiebt sich für $r = 1 = a$

$$G = \frac{32{,}804}{53{,}765} = 0{,}61014.$$

§ 37.

Aufgabe. Die Entfernung des Schwerpunkts (x') vom Mittelpunkt für die elliptische Fläche $DCE = f$ zu finden, welche vom Scheitel C der grossen Axe $(2 a)$ bis zu der Linie DE sich erstreckt, welche mit der kleinen Axe $(2 b)$ parallel läuft. Fig. 6.

Auflösung. Es ist $x' f = 2 \int y \, x \, d x$, oder da $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{y}\right)^2 = 1$ ist, so hat man $x' f = 2 b \int x . \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \, d x$. Setzt man noch $\frac{x}{a} = \xi$, so wird

$$x' f = 2 a^2 b \int \xi . \sqrt{1 - \xi^2} \, d \xi = - \tfrac{2}{3} a^2 b . (1 - \xi^2)^{\frac{3}{2}} + \text{Const. (nach § 14, 3),}$$

oder $x' f = \frac{2}{3} a^2 b . (1 - \xi^2)^{\frac{3}{2}}$, da das Integral von $\xi = \xi$ bis $\xi = 1$ zu nehmen ist.

Ferner ist $f = 2 \int y \, d x = 2 a b \int \sqrt{1 - \xi^2} \, d \xi = 2 a b \left[\frac{- ar . cos \, \xi}{2} + \frac{\xi . \sqrt{1 - \xi^2}}{2}\right]$ (nach § 9, e), oder für die angegebenen Grenzen: $f = a b \left[ar . cos \, \xi - \xi . \sqrt{1 - \xi^2}\right]$.

Es sei noch $cos \, \alpha = \xi$, also $\sqrt{1 - \xi^2} = sin \, \alpha$, dann erhält man:

$$x' = \frac{\frac{2}{3} a . sin \, \alpha^3}{\alpha - \frac{1}{2} sin \, 2 \alpha}, \text{ wo } \alpha = ar . cos \frac{x}{a} \text{ ist.}$$

§ 38.

Aufgabe. Man soll für eine hyperbolische Fläche (F) die Entfernung ihres Schwerpunkts (X') von ihrem Mittelpunkte O, dem Mittelpunkte der zugehörigen Ellipse mit den Halbaxen a und b, finden, wenn sich diese Fläche von ihrem Scheitel A bis zur Doppel-Ordinate $BC = 2 y$ erstrekt. Fig. 7.

Auflösung. Wir haben wieder $X' . F = 2 \int y \, x \, d x$ und $F = 2 \int y \, d x$.

Da hier $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ ist, so ist:

$$X' F = 2 b \int x \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}\, d x \text{ und } F = 2 b \int \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}\, d x$$

Man setze $\frac{x}{a} = \xi$, so erhält man:

$$X' F = 2 a^2 b . \int \xi \sqrt{\xi^2 - 1}\, d \xi \text{ und } F = 2 a b \int \sqrt{\xi^2 - 1}\, d \xi,$$

oder nach § 14, γ und nach § 12:

$$X' F = \tfrac{2}{3} a^2 b . (\xi^2 - 1)^{\frac{3}{2}} \text{ und } F = a b\, (- Ar\, Cos\, \xi + \xi . \sqrt{\xi^2 - 1}).$$

Eine Constante ist nicht hinzuzufügen, da die Integrale für $x = a$, d. h. für $\xi = 1$ verschwinden und da sie von $\xi = 1$ bis $\xi = \xi$ zu nehmen sind.

Da nun $\xi = Cos\, A$ gesetzt werden kann, so ist $\sqrt{\xi^2 - 1} = Sin\, A$.

Demnach haben wir:

$$X' = \frac{\frac{2}{3} a . Sin\, A^3}{- A + \frac{1}{2} Sin\, 2 A}, \text{ wo } A = Ar . Cos\, \frac{x}{a} \text{ ist.}$$

In der „Beilage" habe ich hiezu ein Beispiel für $x = 2 a$ berechnet und gefunden: $X' = 1{,}6133 . a$.

§ 39.

Fig. 8. **Aufgabe.** Die rechtwinkligen Coordinaten des Schwerpunkts ϱ ($x' m = x'$ und $x' \varrho = y'$) eines parabolischen Bogens $m u = B$, der vom Scheitel m beginnt und sich bis zum Punkte u erstreckt, dessen Coordinaten $m x = x$ und $x u = y$ gegeben sind, zu bestimmen. Der Parameter sei $= 2 p$.

I) Zunächst ist $B . x' = \int x\, d B$, und da $d B = \sqrt{1 + \left(\frac{d y}{d x}\right)^2}\, d x$ und $y^2 = 2 p x$ ist, so haben wir nach § 17, II:

$$B . x' = \int d x . \sqrt{\frac{p}{2} x + x^2} = \frac{4 x + p}{16} \sqrt{2 p x + 4 x^2} - \frac{p^2}{16} Ar . Cotg \frac{\sqrt{2 p x + 4 x^2}}{2 x},$$

oder wenn wir, wie in § 32, die Tangente des Punktes u, nämlich $\sqrt{y^2 + (2 x)^2}$ mit t bezeichnen,

$$B . x' = \frac{4 x + p}{16} t - \frac{p^2}{16} Ar\, Cotg \frac{t}{2 x},$$

wo eine Constante nicht hinzuzufügen ist, da das Integral für $x = o$, wie sich's gebührt, verschwindet.

Weil nun nach § 32 $B = \frac{t}{2} + \frac{p}{2} Ar\, Cotg \frac{t}{2 x}$ ist, so erhält man:

$$x' = \frac{(4 x + p) t - p^2 A}{8 . (t + p A)}, \text{ wobei } Cotg\, A = \frac{t}{2 x} \text{ ist.}$$

II. Ferner ist $B . y' = \int y\, d B = \int d x \sqrt{p^2 + 2 p x} = \frac{\sqrt{(p^2 + 2 p x)^3}}{3 p} = \frac{n^3}{3 p}$, wenn die Normale des Punktes u, nämlich $\sqrt{p^2 + y^2} = n$ gesetzt wird.

Da für $x = o$ das Integral $= \frac{p^3}{3 p}$ wird, so ist innerhalb der Grenzen $x = o$ und $x = x$

$$B . y' = \frac{n^3 - p^3}{3 p} \text{ und } y' = \frac{2 . (n^3 - p^3)}{3 p . (t + p A)}.$$

Beispiel.

Es sei, wie in § 32, $2p = 1$ und $x = 2$, dann ist $t = \sqrt{18}$, $\log Cotg\ A = 0.02558$, $A' = (z' =)\ 0{,}76552$, $\log\ A = 0{,}24618$ und $\frac{p^2}{16} A = 0.027542$, $\frac{4x+p}{16} t = 2{,}2538$, also $B \,.\, x' = 2.2263$, und weil nach dem eben angezogenen § 32 $B = 2{,}56202$ ist, so hat man $x' = 0.86898$.

Da ferner $n = \frac{3}{2}$ ist, so führt $B \,.\, y' = \frac{13}{6}$ auf $y' = 0{,}84569$.

Anmerkung. Bei Dr. E. S. Unger (Uebungen aus der angewandten Mathematik, 1830, I, pag. 371 und II, pag. 183) hat man x' aus folgenden zwei Gleichungen zu berechnen:

$$B = \tfrac{1}{2} \sqrt{2px + 4x^2} + \frac{p}{2} Log \frac{\sqrt{2px + 4x^2} + 2x}{y}$$

und (mit Verbesserung einiger Fehler):

$$B \,.\, x' = \frac{4x+p}{16} \sqrt{4x^2 + y^2} - \frac{p^2}{16} Log \,.\, \frac{\sqrt{4x^2+y^2} + 2x}{y}.$$

Die entsprechenden Ausdrücke bei Sohncke (Sammlung von Aufgaben aus der Differential- und Integralrechnung, herausgegeben von Herrn Prof. Dr. Heis, 1865, 2. Theil, pag. 100) sind noch länger, da statt $Log \,.\, Q$ sie $\tfrac{1}{2}\, Log \,.\, Q^2$ enthalten, wobei der Kürze wegen $\frac{\sqrt{2px + 4x^2} + 2x}{y} = Q$ gesetzt ist.

§ 40.

Aufgabe. Bei einem elliptischen Bogen $MC = \tau$, der vom Scheitel der grossen Axe C sich bis zum Punkte M erstreckt, dessen Coordinaten $CD = x$ und $DM = y$ sind, soll man die Entfernung (y') seines Schwerpunkts von der grossen Axe finden. Fig. 9.

Auflösung. Da $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ und $d\tau = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ ist, so folgt aus $y' . \tau = \int y\, d\tau$, wenn man $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ setzt, nach einigen leichten Rechnungen: $y' . \tau = b \int dx \,.\, \sqrt{1 - \frac{e^2 x^2}{a^2}}$, wo das Integral von $x = a$ bis $x = x$ zu nehmen ist. Es sei noch $\frac{ex}{a} = \xi$, so erhält man (§ 8 und § 9, e):

$$y' . \tau = \frac{a \,.\, b}{e} \int d\xi \,.\, \sqrt{1 - \xi^2} = \frac{ab}{e} \left[- \frac{ar \,.\, \cos \xi}{2} + \frac{\xi \,.\, \sqrt{1 - \xi^2}}{2} \right]$$

$$= \frac{ab}{2c} \left[- \omega + \frac{\sin 2\omega}{2} \right],$$

wenn $\cos \omega = \xi$ gesetzt wird. Die eckige Klammer erlange für die eine Grenze $x = a$ oder $\xi = e$ den Werth: $- \Omega + \frac{\sin 2\Omega}{2}$, wo also $\cos \Omega = e$ ist.

$$\text{Dann ist} \int_e^\xi d\xi \,.\, \sqrt{1 - \xi^2} = \tfrac{1}{2} \left[(\omega - \Omega) - \frac{\sin 2\omega - \sin 2\Omega}{2} \right],$$

$$\text{oder } y' . \tau = \frac{ab}{2e} \Big[(\omega - \Omega) - \sin (\omega - \Omega) \,.\, \cos (\omega + \Omega) \Big].$$

Beispiel.

Es sei, wie in dem Beispiel zu § 33, $a = 1$, $b = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$, $e = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$, und $x = \tfrac{1}{2}$. Dann ist, nach Legendre III, pag. 342, der elliptische Quadrant $BC = E = 1.35064.39$ und der elliptische Bogen $BM = 0{,}51204.93$, also $MC = \tau = 0.83859.46$.

Ferner ist $\omega = 69^0\ 17'\ 42{,}67$ und $\Omega = 45^0$. Demnach haben wir:

$\omega - \Omega = 0{,}42403.11$ und da hier $180^0 - (\omega + \Omega) = 90^0 - (\omega - \Omega)$ ist, so folgt:

$- \sin(\omega - \Omega) . \cos(\omega + \Omega) = + \sin(\omega - \Omega)^2 . = 0{,}16928.11.$ Mithin ist:

$\log(y' . \tau) = 9{,}47225.33$ und $y' = 0.35375.39$.

§ 41.

Aufgabe. Bei einem hyperbolischen Bogen $CM = T$, der vom Scheitel C bis zu einem beliebigen Punkte M geht, dessen Coordinaten $OD = x$ und $DM = y$ sind, ist die Entfernung (Y') seines Schwerpunktes von der ersten Axe AC anzugeben.

Auflösung. Aus $Y'T = \int y\, dT$ folgt, da $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$ und $y^2\, dT^2 = y^2\, dx^2 + y^2\, dy^2$ ist, wenn man noch $e^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2}$ setzt, nach leichten Rechnungen:

$$y . dT = b . dx . \sqrt{\left(\frac{ex}{a}\right)^2 - 1}, \text{ oder indem man } \xi \text{ für } \frac{ex}{a} \text{ schreibt,}$$

$$y . dT = \frac{a . b}{e}\, d\xi . \sqrt{\xi^2 - 1}. \text{ Mithin ist nach § 12, } J:$$

$$\int y . dT = \frac{ab}{2e}\left[- Ar . Cos\, \xi + \xi . \sqrt{\xi^2 - 1}\right].$$

Es sei $Ar\, Cos\, \xi = z$, also $\xi = Cos\, z$ und $\sqrt{\xi^2 - 1} = Sin\, z$.

Dann ist $\int y\, dT = \frac{ab}{2e}\left[- z + Sin\, z . Cos\, z\right] = \frac{a.b}{2e}\left[-z + \frac{Sin\, 2z}{2}\right].$

Da dieses Integral von $x = a$ bis $x = x$ zu nehmen ist, so ist es auch zu nehmen von $\xi = e$ bis $\xi = \xi$.

Nun sei $Ar\, Cos\, e = Z$, dann ist

$$\int_e^{\xi} \sqrt{\xi^2 - 1}\, d\xi = \tfrac{1}{2}\left[-z + \frac{Sin\, 2z}{2}\right] - \tfrac{1}{2}\left[-Z + \frac{Sin\, 2Z}{2}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[-(z - Z) + \frac{Sin\, 2z - Sin\, 2Z}{2}\right]$$

$$\text{und } Y' . T = \frac{ab}{2e}\left[-(z - Z) + Sin\,(z - Z)\, Cos . (z + Z)\right].$$

Beispiel.

Man nehme $a = b = 1$, $e = \sqrt{2}$, $x = 2a$, $\xi = 2\sqrt{2}$, an, dann ist, wie wir aus § 34 wissen, $T = 2{,}0376.23$ und $\log T = 0{,}30912$. Ferner ist:

$$\left.\begin{matrix} z' = 0{,}73832 \\ Z' = 0{,}38278 \end{matrix}\right\} \text{ also } (z - Z) = 0{,}81866.1, \left(\text{wegen } z = \frac{z'}{M}\right).$$

$$\text{Da nun } \left.\begin{matrix} \log Sin\,(z - Z) = 9{,}82887 \\ \log Cos\,(z + Z) = 0.82255 \end{matrix}\right\} \text{ also } Sin\,(z - Z)\, Cos\,(z + Z) = 4{,}4815 \text{ ist,}$$

so ist $\log$ (Klammer) $= 0.56382$

und weil $\log 2e = 0{,}45154$, so ist $\log Y' = 9{,}80316$ und

$Y' = 0{,}63556$.

Bestimmung des Widerstandscoefficienten aus Fallversuchen.

§ 42.

Bezeichnen wir die doppelte Fallhöhe während der ersten Zeitsecunde im leeren Raume mit g', die innerhalb des Fallraums als constant vorausgesetzte Dichtigkeit des widerstehenden Mediums mit D', die des darin befindlichen Körpers mit D, so ist bekanntlich die Schwerkraft desselben im widerstehenden Mittel nur $g = g' . \frac{D - D'}{D}$.

Der Widerstand bei der Bewegung wird erzeugt durch das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit. Trifft eine ebene Fläche f senkrecht auf die widerstehende Flüssigkeit, so kann man als den Widerstand erzeugend das Gewicht einer Säule der Flüssigkeit ansehen, deren Basis f und deren Höhe einer Function der Geschwindigkeit gleich ist. Hat man es aber, wie das bei Fallversuchen immer vorausgesetzt wird, mit einer Kugel zu thun, deren grösster Querdurchschnitt $= f$ ist, dann muss man wegen zwiefacher Zerlegung der Kräfte nach Newton (Princ. II, Propos. 34, Theor. 28) als Basis jener hier in Betracht kommenden Flüssigkeitssäule nur $\frac{1}{2} f$ annehmen.

Nennt man v die Geschwindigkeit der Kugel und nimmt man g' als Mass derselben an, so ist $\frac{v}{g'}$ die in dem erwähnten Masse ausgedrückte Geschwindigkeit und $\varphi\left(\frac{v}{g'}\right)$ stelle die Höhe jener widerstehenden Säule vor. Dann ist das Gewicht dieser Säule $= g' . D' . \frac{f}{2} . \varphi\left(\frac{v}{g'}\right)$ und wenn m die Masse der Kugel bedeutet, so ist die beschleunigende Kraft $\psi = \frac{g' . D' . f . \varphi\left(\frac{v}{g'}\right)}{2\, m} = \frac{3}{8} . \frac{g' . D'}{D . r} \varphi\left(\frac{v}{g'}\right)$, wo r den Radius der Kugel angiebt.

Was die für die Höhe zu wählende Function der Geschwindigkeit anbelangt, so habe ich darüber in meiner Abhandlung: „Ueber die Bewegung schwingender Körper im widerstehenden Mittel, Danzig 1850“ folgende Hypothese aufgestellt:

$$\varphi\left(\frac{v}{g'}\right) = g' \left[\delta \left(\frac{v}{g'}\right) + \delta' \left(\frac{v}{g'}\right)^2 + \ldots\right]$$

und aus den Pendelversuchen, welche Newton in der Luft angestellt hat, die Widerstandscoefficienten δ und δ' nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet, wonach:

Erste Versuchsreihe mit einer hölzernen Kugel.	Zweite Versuchsreihe mit einer bleiernen Kugel.
$\delta = 0{,}0042965$	$\delta = 0{,}018938$
$\delta' = 0{,}77482$	$\delta' = 0{,}77482.$

Nach derselben Hypothese habe ich aus Bessel's Abhandlung: „Untersuchungen über die Länge des einfachen Secundenpendels" einige Versuche berechnet und als arithmetisches Mittel aus 16 Versuchen mit dem langen Faden, an welchem theils die messingene Kugel, theils die elfenbeinerne pendelte, gefunden: $\delta = 0{,}00883$ und $\delta' = 0{,}67778$, worüber ich in einer Sitzung der hiesigen naturforschenden Gesellschaft Auskunft gegeben habe.

Doch wollen wir, wenigstens für dies Mal, bei den jetzt zu behandelnden Fallversuchen der seit Newton herrschenden Ansicht folgen, wonach der Widerstand nur dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist, also das kleinere $\delta = o$ setzen. Dann haben wir:

$$\varphi\left(\frac{v}{g'}\right) = \delta' \frac{v^2}{g'} \text{ und } \psi = \frac{3\,\delta'}{8} \cdot \frac{D'}{D\,.\,r} v^2.$$

Poisson in seinem Traité de Mécanique, 1833, I, pag. 229 und pag. 414 und II, pag. 39 und 40 bezeichnet den Factor $\frac{3\,\delta'}{8}$ mit n und äussert sich über denselben folgender Massen: D'après une théorie très imparfaite de la résistance des fluides ce nombre n serait $\frac{3}{8}$; mais toutes les expériences le donnent plus petit et Lombard le fait égal à $\frac{9}{40}$... C'est à Newton qu' est dû ce premier essai sur la résistance des fluides. En comparant le résultat de son calcul au temps observé de la chute d'une sphère qui tombe dans l' air, d'une grande hauteur, il a reconnu qu'il faudrait, pour accorder l'un avec l'autre, réduire à moitié la valeur précédente. D'après d'autres expériences, faites par Borda, cette valeur doit être seulement réduite aux trois cinquièmes; ce qui donne $\psi = \frac{9}{40} \frac{D'.v^2}{D.r}$.... Cette théorie de la résistance repose sur une comparaison vague de l'action du fluide au choc des corps, et sur la supposition inadmissible, que dans ce choc, les molécules du fluide agissent isolément sur le mobile et nullement l'une sur l'autre. Elle est démentie par l'observation, quant à la grandeur absolue que le calcul donne à peu près double de celle qui résulterait de l'expérience.... In ähnlicher Weise spricht sich auch J. J. v. Littrow (in Gehler's physikalischem Wörterbuch, 1842, 10. Band, pag. 1733) über Newton's Theorie aus, mit den Worten schliessend: „wobei er (N) aber fand, dass man, um zwischen der Rechnung und der Beobachtung eine Uebereinstimmung zu erhalten, den vorigen Werth nahe um seine Hälfte kleiner annehmen müsse, was allerdings für diese Theorie nicht sehr günstig war." Gegen diese Bemerkungen Poisson's und Littrow's würde sich nichts einwenden lassen, wenn sich aus Newton's Theorie der Coefficient $\delta' = 1$ ergeben sollte. Es wird sich aber bald zeigen, dass gerade aus Newton's Theorie $\delta' = \frac{1}{2}$ folgt, und dass also nicht seine Theorie den Widerstand grösser angiebt als Lombard's und Borda's Versuche, sondern dass im Gegentheil diese Versuche, wonach $n = \frac{9}{40}$ ist, den Widerstand im Verhältniss 6:5 grösser angeben, als Newton's Theorie. Hiebei mache ich noch auf den Umstand aufmerksam, dass Poisson der Ansicht ist, dass der Coefficient n nur durch Versuche zu bestimmen sei, während diese bei Newton nur dazu dienen, um zu zeigen, wie weit Theorie und Erfahrung auseinandergehen.

Es wird gut sein, schon hier, wie es die Natur der Sache erheischt, den Ausdruck für ψ dem von g conform zu machen; man setze daher, indem man unter k

eine durch die jedesmaligen Umstände bedingte, also constante Geschwindigkeit versteht,

$$\psi = \frac{n.D'.v^2}{D\,r} = g\cdot\frac{v^2}{k^2}, \text{ so dass also } k^2 = g\cdot\frac{D\,r}{n\,D'} = \frac{8}{3\,\delta'}\,g\cdot\frac{Dr}{D'} \text{ ist.}$$

§ 43.

Wir wollen damit anfangen, die Gesetze der Bewegung eines Körpers, welcher mit einer gegebenen Anfangsgeschwindigkeit a im widerstehenden Mittel senkrecht in die Höhe geworfen wird, aufzustellen.

Bekanntlich ist für irgend eine Zeit t:

$$\frac{d\,v}{d\,t} = -g - \psi = -g - g\cdot\frac{v^2}{k^2},$$

$$\text{oder } -d\,t = \frac{k}{g}\cdot\frac{d\left(\frac{v}{k}\right)}{1+\left(\frac{v}{k}\right)^2}. \text{ Dies giebt:}$$

$-\frac{g}{k}\,t = ar\,.\,tg\left(\frac{v}{k}\right) + C.$ Da zu $t = o$, $v = a$ gehört, so ist $C = -\,ar\,.\,tg\,\frac{a}{k}$,

$$\text{mithin } \frac{g}{k}\,t = ar\,.\,tg\frac{a}{k} - ar\,.\,tg\,\frac{v}{k}.$$

Setzt man hierin $v = o$, so erhält man für die Dauer des Steigens, ϑ, den Ausdruck: $tg\,\frac{g}{k}\,\vartheta = \frac{a}{k}$ und die vorige Gleichung geht in folgende über:

1) $ar\;tg\,\frac{v}{k} = \frac{g}{k}\,(\vartheta - t) = \frac{g}{k}\,\tau$, oder $v = k\;tg\,\frac{g}{k}\,\tau$, wo τ die Zeit ist, die der Körper noch zu steigen hat, bevor er zum momentanen Stillstand gelangt.

Ist ferner s der beim Steigen in der Zeit t durchlaufene Raum, so hat man:

$$d\,s = v\,d\,t = -\frac{k^2}{g}\cdot\frac{\frac{v}{k}\cdot d\left(\frac{v}{k}\right)}{1+\left(\frac{v}{k}\right)^2}, \text{ woraus hervorgeht:}$$

$s = -\frac{k^2}{2g}.Log.\left(1+\frac{v^2}{k^2}\right) + C.$ Da für $v = a$ sich $s = o$ ergiebt, so ist

$$2)\quad s = \frac{k^2}{2g}Log\,\frac{1+\frac{a^2}{k^2}}{1+\frac{v^2}{k^2}}, \text{ oder } \frac{2g}{k^2}\,s = Log\,\frac{k^2+a^2}{k^2+v^2}.$$

Die grösste Höhe (H), zu der der Körper sich erhebt, findet man für $v = o$, nämlich: $H = \frac{k^2}{2\,g}\,Log\left(1+\frac{a^2}{k^2}\right)$. Mit Benutzung dieses Ausdrucks nimmt die vorige Gleichung folgende Gestalt an:

$$2)\quad H - s = \sigma = \frac{k^2}{2\,g}\,Log\left(1+\frac{v^2}{k^2}\right).$$

wo σ den Raum bedeutet, den der Körper noch zu steigen hat, bevor er den höchsten Standpunkt erreicht.

Setzt man endlich in dem Ausdruck: $d\,s = v\,d\,t$ für v seinen in 1) gefundenen Werth, so erhält man:

$$d\,s = k\,.\,tg\,\frac{g}{k}\,\tau\,.\,d\,(\vartheta - \tau) = -\frac{k^2}{g}.\,tg\,\frac{g}{k}\,\tau\,.\,d\left(\frac{g}{k}\,\tau\right), \text{ also}$$

$$s = \frac{k^2}{g}.\,Log\,.\,cos\left(\frac{g}{k}\,\tau\right) + C, \text{ da } \int tg\,\xi\,.\,d\,\xi = -\,Log\,cos\,\xi \text{ ist.}$$

Weil nun aus der Annahme $\tau = o$ die Constante C sich $= H$ ergiebt, so hat man:

$$3) \begin{cases} \frac{g}{k^2}(H - s) = -Log\,cos\,\frac{g}{k}(\vartheta - t), \text{ oder kürzer:} \\ \frac{g}{k^2}\sigma = -Log.cos\,\frac{g}{k}.\tau. \end{cases}$$

Man hätte die letzte Gleichung auch ohne Weiteres aus Nr. 2 ableiten können, wenn man darin für v seinen Werth aus Nr. 1 substituirt hätte.

Setzt man in den vorstehenden Gleichungen den Widerstand $D' = o$, also $k = \infty$, so erhält man, wie sich's gebührt:

$$a)\ \vartheta = \frac{a}{g'},\ v = g'.\tau,\quad b)\ H = \frac{a^2}{2g'},\ \sigma = \frac{v^2}{2g'},\quad c)\ \sigma = \frac{g'}{2}\tau^2.$$

§ 44.

Will man aber die Bewegung eines im widerstehenden Mittel fallenden Körpers untersuchen, so hat man von folgender Gleichung auszugehen:

$$\frac{dv}{dt} = g\left(1 - \frac{v^2}{k^2}\right) \text{ oder } dt = \frac{k}{g}.\frac{d\left(\frac{v}{k}\right)}{1 - \frac{v^2}{k^2}}. \text{ Mithin (§ 8, 3) ist:}$$

$t = \frac{k}{g} Ar.Tg\,\frac{v}{k}$. Eine Constante ist nicht hinzuzufügen, da t und v zugleich verschwinden. Man schliesst also sofort weiter:

$$I)\ Ar\ Tg\,\frac{v}{k} = \frac{g}{k}t \text{ oder } v = k\,Tg\,\frac{g}{k}t.$$

Den wesentlichen Inhalt dieser Gleichung und der entsprechenden ersten Gleichung des vorigen § hat, wie Mossotti in dem oben erwähnten Werke pag. 5 in Erinnerung bringt, schon Newton in seinen Princ. II. prop. 9 durch eine geometrische Construction gegeben.

Da die hyperbolischen Tangenten, analog den cyklischen Sinus höchstens $= 1$ werden können, so wird die grösste Geschwindigkeit, welche der fallende Körper im widerstehenden Mittel annehmen kann, gleich $k = \sqrt{\frac{8}{3\delta'}\,g.\frac{Dr}{D'}}$ sein.

Streng genommen, wird diese grösste Geschwindigkeit erst eintreten, wenn $t = \infty$ geworden ist. Weil aber, wenigstens bei fünfstelligen Rechnungen, die hyperbolischen Tangenten von Aren (z) über $4{,}74 = Z$ hinaus ebenso wenig mehr merklich wachsen, wie die cyklischen Sinus von Aren (ω) etwa über 89^0 hinaus, so kann man auch sagen, dass die Geschwindigkeit beim Fall der Körper in einem Medium nicht mehr merklich zunehmen werde, wenn eine Zeit T verflossen ist, welche $= \frac{k}{g}Z$ ist, so dass also schon nach $T = \frac{k}{g}Z$ Zeitsecunden die Geschwindigkeit des fallenden Körpers keine merkliche Beschleunigung mehr erfährt, sondern gleichförmig zu werden beginnt. Lässt man nun gar, wie ich es später thun werde, $Z = 8$ werden, so wird beim weitern Fallen die Geschwindigkeit selbst in der 7ten Stelle nicht mehr wachsen.

Den Zusammenhang zwischen dem durchlaufenen Raum (s) und der Geschwindigkeit (v) findet man bekanntlich durch folgende Rechnung:

$$\text{Aus } ds = v\,dt = \frac{k^2}{g}.\frac{\frac{v}{k}.d\left(\frac{v}{k}\right)}{1 - \left(\frac{v}{k}\right)^2} \text{ erhält man:}$$

II) $s = -\frac{k^2}{2g} \cdot Log\left(1 - \frac{v^2}{k^2}\right)$. Auch hier ist keine Constante hinzuzufügen, da für $v = o$ auch $s = o$ wird.

Nimmt man an, dass der hier betrachtete fallende Körper derselbe ist, welcher vorhin mit einer Anfangsgeschwindigkeit a sich bis zur Höhe $= H$ erhob, so liegt die Frage nahe, welche Endgeschwindigkeit $(a_,)$ der Körper erlangen werde, nachdem er durch den Raum H wieder herabgefallen sein wird. Die Beantwortung dieser Frage geben folgende Gleichungen:

$$H = \frac{k^2}{2g} Log\left(1 + \frac{a^2}{k^2}\right) = -\frac{k^2}{2g} Log\left(1 - \frac{a_,^2}{k^2}\right).$$

Danach ist $a_,^2 = \dfrac{a^2}{1 + \frac{a^2}{k^2}}$, also stets $a_, < a$.

Am wichtigsten für uns ist beim Fallen der Körper der unmittelbare Zusammenhang zwischen Raum und Zeit. Wir erhalten diesen Zusammenhang durch dieselbe Differentialgleichung: $ds = v \cdot dt$, wenn wir darin aus I) für v seinen Werth entnehmen. Danach ist:

$$ds = \frac{k^2}{g} \cdot Tg\, \frac{g}{k} t \cdot d\left(\frac{g}{k} t\right) \text{ und mit Hilfe von § 6, Nr. 11:}$$

$$\text{III) } s = \frac{k^2}{g} \cdot Log \cdot Cos\left(\frac{g}{k} t\right).$$

Weil t und s zugleich Null werden, so ist keine Constante nöthig.

Denselben Werth für s würde man auch aus II) erhalten haben, wenn man darin für v seinen Werth aus I) gesetzt hätte, indem $1 - Tg\, z^2 = Sec\, z^2 = \frac{1}{Cos\, z^2}$ ist.

Da für kleine hyperbolische Aren $Tg\, z = z$ und $Log\, Cos\, z = \frac{z^2}{2}$ ist, so findet man aus den obigen drei Formeln, wenn man $k = \infty$ setzt, mit der grössten Leichtigkeit für den Fall der Körper im luftleeren Raum die bekannten Gleichungen:

$$\text{A) } v = g' \cdot t, \quad \text{B) } s = \frac{v^2}{2g'}, \quad \text{C) } s = \frac{g'}{2} \cdot t^2.$$

Der Uebersicht wegen stelle ich die wichtigsten Werthe für's Steigen und Fallen der Körper im widerstehenden Mittel zusammen:

Für's Steigen:	Für's Fallen — Jetzt:	Für's Fallen — Sonst:
1) $\left\{\begin{array}{l} tg\left(\frac{g}{k}\vartheta\right) = \frac{a}{k} \\ v = k\, tg\left(\frac{g}{k}\tau\right) \end{array}\right\} \tau = \vartheta - t$	I) $v = k\, Tg\left(\frac{g}{k} t\right)$	$= k \cdot \dfrac{e^{\frac{gt}{k}} - e^{-\frac{gt}{k}}}{e^{\frac{gt}{k}} + e^{-\frac{gt}{k}}}$
2) $\left\{\begin{array}{l} H = \frac{k^2}{2g} Log\left(1 + \frac{a^2}{k^2}\right) \\ \sigma = \frac{k^2}{2g} Log\left(1 + \frac{v^2}{k^2}\right) \end{array}\right\} \sigma = H - s$	II) $s = -\frac{k^2}{2g} Log\left(1 - \frac{v^2}{k^2}\right)$	
3) $\sigma = -\frac{k^2}{g} Log \cdot cos\left(\frac{g}{k}\tau\right)$	III) $s = \frac{k^2}{g} \cdot Log \cdot Cos\left(\frac{g}{k} t\right)$	$= \frac{k^2}{g} Log \dfrac{e^{\frac{gt}{k}} + e^{-\frac{gt}{k}}}{2}$

Aus der letzten Formel in der mit „Sonst“ überschriebenen Rubrik hat Poisson (I pag. 244), für den Fall, dass k im Verhältniss zu $g\,t$ sehr klein ist, den Näherungswerth: $s = kt - \frac{k^2}{g} Log \cdot 2$ abgeleitet, auf welchen ich später zurückkomme.

§ 45.

Zunächst will ich nach den vorstehenden Formeln unter der Voraussetzung, dass der Widerstandscoefficient δ' schon anderweitig bekannt geworden ist, einige Beispiele berechnen. Als erstes Beispiel wähle ich aus Muncke's Anfangsgründen der Naturlehre I, pag. 60 einen Versuch, dessen Data aus Hutton's Course of math. III. 272 entnommen sind: „Eine eiserne Geschützkugel von 1,05 Pfund avoir du poid Gewicht stieg bei einer Anfangsgeschwindigkeit von $a = 2000$ engl. Fuss nach einer Formel Hutton's, wonach $H = 760 . d . log \left(\frac{a^2 - 150 a}{21090 . d} + 1\right)$ ist, nur $H = 2920$ engl. Fuss, statt dass sie im vacuo 11 mal so hoch gehen würde.“ (Die Angabe „2920 Fuss“ ist wohl falsch, da bei der angegebenen Anfangsgeschwindigkeit die Kugel im Leeren 62157 engl. Fuss steigen würde; vielleicht ist dem Original zu Folge 2920 F. nur etwa die halbe Steighöhe. In Hutton's Formel ist $d = 2r$; ob aber unter dem Logarithmen der briggische oder hyperbolische zu verstehen ist, geht aus Muncke's Angaben nicht hervor.)

Wie man sieht, ist der Radius der Kugel nicht angegeben und da ich nicht wage, ihn aus Benzenberg's Werk: „Versuche über die Umdrehung der Erde pag. 523 zu entnehmen, wonach $2r = 1,965$ engl. Zoll (also $r = 0,0795$ pr. F.) sein könnte, so bleibt nichts übrig, als ihn aus dem Gewicht der Kugel zu bestimmen. Weil ich übrigens beabsichtige diesen Versuch mit den folgenden in Vergleich zu stellen, so werde ich die mir nothwendigen Data nach preussischem Maas und Gewicht ausdrücken.

Wenn ein Berliner Pfd. = 468461,2 Milligr. und ein Pfd. avoir du poid Gewicht = 453614,6 Milligr. hat, so wog die Kugel 1,0167 preuss. Pfd. Rechnen wir 1 Kubikfuss Wasser zu 66 pr. Pfd. und setzen das specifische Gewicht des Eisens 7,78, so folgt aus $\frac{4}{3} r^3 \pi . 66 . 7,78 = 1,0167$ der Radius $r = 0,077898$ preuss. Fuss $= 0,934776$ pr. Zoll.

Ist ferner der englische Fuss $= 0,9711$ pr. F., so war die Anfangsgeschwindigkeit $a = 1942,2$ pr. Fuss.

Die Schwere im luftleeren Raum g' setze ich $= 2.15\frac{5}{8}$ pr. F. und das Verhältniss der Dichtigkeit der Luft zur Dichtigkeit des Eisens nach Euler's Mechanik $= 1 : 7500$, so dass $\frac{D'}{D} = \frac{1}{7500}$ und $g = 2.15,625 . \frac{7499}{7500} = 31,245834$ und $log\, g = 1,49479.21$ ist.

Nimmt man nun noch mit Newton $\delta' = \frac{1}{4}$ an, so hat man: $log\, k^2 = 4,98838$ und $log \left(\frac{k^2}{2g}\right) = 3,19256$. Demnach giebt die obige Formel unter Nr. 2:

$H = \frac{k^2}{2g} Log . \left(1 + \frac{a^2}{k^2}\right)$, da $\frac{a^2}{k^2} = 38,744$ und $log\, Log\, 39,744 = 0.56615$ ist, die gesuchte Steighöhe $H = 5737.3$ pr. Fuss. Und da die Steighöhe im Vacuum (nach § 43, b) $c = \frac{a^2}{2g'} = 60361$ pr. Fuss sein würde, so wäre sie im luftleeren Raum $Q = 10.521$ mal grösser als im lufterfüllten Raum, ein Resultat, welches mit Hutton's 11 ziemlich gut übereinstimmt.

Wegen des beabsichtigten Vergleichs mit einigen andern Beispielen denke ich mir, dass Hutton's Kugel nur $H = 4443$ pr. F. steigen soll. Dann müsste nach den obigen Formeln die Anfangsgeschwindigkeit $a = 1260,5$ pr. F. betragen und es

würden zum Steigen $\vartheta = 13{,}263$ Secunden gehören. Fiele die Kugel wieder den nämlichen Weg herunter, so würde dies in $\vartheta_{,} = 21{,}014$ Secunden geschehen und sie käme zu dem Ausgangspunkte nur mit einer Endgeschwindigkeit $a_{,} = 302{,}88$ pr. F. an. Die grösste Geschwindigkeit, die sie beim weiteren Fallen in Luft überhaupt erlangen würde, ist $k = 312{,}02$ pr. F. Weil die Kugel bei der angegebenen Anfangsgeschwindigkeit im luftleeren Raum in $t' = 40'',335$ Secunden $c = 25420$ pr. F. steigt, so würde jenes oben berührte Verhältniss zwischen den erreichten Höhen im luftleeren und lufterfüllten Raum nur $Q = 5{,}72$ sein.

Wenn die Kugel im luftleeren Raum 4443 F. steigen soll, so ist $\vartheta = \vartheta' = 16{,}86274$ Secunden und $a = a_{,} = 526{,}9608$ Fuss.

§ 46.

In den Petersburger Commentarien, Tom. II, 1729, pag. 338 finden sich Versuche, mit Geschützkugeln von General Günther angestellt, angegeben, von denen Daniel Bernoulli berichtet: ex quibus apparebunt stupendi effectus, quos aer in corpora gravitatis specificae octies millesies fere majoris exercere valet. Doch entnehme ich von daher nur den Durchmesser der bei den Versuchen angewandten eisernen Kugeln, welcher 23¾ Hundertel eines englischen Fusses betragen hat, und richte mich im Uebrigen nach Euler's zum Theil schon angegebenen Angaben, welche sich in seiner Mechanik § 457 vorfinden. Euler's Rechnung, auf welche ich später eingehen werde, ergiebt, dass diese Kugel in der Luft zu einer Höhe von $H = 4443$ pr. Fuss steigt. Danach ist:

$r = 0{,}1153181$ pr. F.	$a = 919{,}39$	$\vartheta = 14'',32745$	$c = 13524$	
$\log k^2 = 5{,}15874.96$	$a_{,} = 350{,}89$	$\vartheta_{,} = 19'',656$	$t' = 29'',421$	$Q = 3{,}04.$
$k = 379{,}64$				

Nach Daniel Bernoulli, der von etwas andern Angaben ausgeht und bei dem z. B. $\frac{D'}{D} = \frac{1}{7650}$ ist, erreichte die Kugel eine Höhe von $H = 4550$ engl. F. (= 4419 pr. F.) in $\vartheta = 14{,}37$ Secunden und fiel dann in $\vartheta_{,} = 19{,}63$ Secunden herab. Im luftleeren Raum würde sie nach seinen Rechnungen $t' = 29$ Secunden gestiegen sein und eine Höhe von $c = 13694$ engl. F. (= 13298 pr. F.) erreicht haben, so dass nach ihm $Q = 3{,}01$ ist.

§ 47.

Bei einer eisernen Kugel, deren Radius $r = 0{,}45$ pr. F. ist, ergeben sich, wenn dieselbe $H = 4443$ pr. F. senkrecht in die Höhe geschossen wird, unter den früheren Voraussetzungen, die beim Steigen und Fallen besonders hervortretenden Zahlen folgender Massen:

$\log k^2 = 5{,}75006.46$	$a = 599{,}16$	$\vartheta = 16'',17941$	$c = 5743{,}8$	$Q = 1{,}29.$
$k = 749{,}94$	$a_{,} = 468{,}11$	$\vartheta_{,} = 17'',566$	$t' = 19'',173$	

§ 48.

Um noch deutlicher zu ersehen, welchen Einfluss die Grösse der Kugel unter den schon bekannten gleichen Umständen auf den Quotienten Q hat, als es aus den vorigen Beispielen erhellen möchte, wähle ich ein Beispiel, welches sich in Herrn

Forti's schon erwähntem Werke pag. 45 vorfindet und welches $r = 1$ Meter voraussetzt. Da der Meter = 3,1862 pr. Fuss hat, so würde diese Kugel, welche gleichfalls von Eisen anzunehmen ist, 69571 pr. Pfd. wiegen. Bevor ich sie aber mit den drei vorigen Kugeln wegen Q in Vergleich stelle, will ich die Rechnung des Herrn Forti erst an und für sich einer Prüfung unterwerfen.

Wie Herr Forti mittheilt, sind die einfachen Gleichungen über den Fall der Körper im widerstehenden Mittel, welche ich in § 44 entwickelt habe, schon 1849 von Mossotti in seiner Meccanica razionale aufgestellt. Nur hat g und ψ bei Mossotti einen etwas anderen Werth, als bei mir. Während bei mir $g = g' . \frac{D - D'}{D}$ ist, setzt Mossotti $g = g' . \frac{D - D'}{D + i D'}$, wobei nach Poisson $i = \frac{1}{2}$ ist. Ich werde Mossotti's g mit $g_{,}$ bezeichnen. Ferner statt $\psi = \frac{3}{8} . \delta' . \frac{D'}{D . r} v^2$ nimmt er mit Poisson $\psi = \frac{3}{4} . \frac{\gamma . (n_{,} + n')}{r} . \frac{D'}{D + i D'} v^2 = \psi_{,}$ an, wo γ ein constanter Coefficient ist, der die unmittelbare Wirkung der widerstehenden Flüssigkeit auf den Körper angiebt und wo die Zahlen $n_{,}$ und n' von der Einwirkung der flüssigen Fädchen auf einander abhängen und dadurch allerdings auch einen Einfluss auf die Bewegung des fallenden Körpers haben. Da indess in der Ausführung Herr Forti den Ausdruck $\gamma . (n_{,} + n') = \frac{1}{4}$ setzt, „come usano gl'idraulici", so kommt er, wie man sieht, dadurch auf unsere vorläufige Annahme, nach welcher $\delta' = \frac{1}{2}$ ist, zurück.

In Folge der verschiedenen Auffassung über g und ψ hat auch k^2 bei ihm einen etwas andern Werth. Während unser $k^2 = \frac{16}{3} g . r \frac{D}{D'}$ war, ist das seinige, welches ich mit $k_{,}^2$ bezeichnen will $= \frac{16}{3} g' . r . \left(\frac{D}{D_{,}} - 1\right)$. Erlaube ich mir indessen statt g zu setzen $g' . \left(1 - \frac{D'}{D}\right)$, so würde dennoch $k^2 = k_{,}^2$ sein, so dass also in der Praxis der Unterschied zwischen k und $k_{,}$ meistens nur unbedeutend sein dürfte.

In dem Beispiel des Herrn Forti wird vorausgesetzt, dass die eiserne Kugel von 1 Meter Radius 15 Secunden Zeit gebraucht hat, um den Erdboden zu erreichen, und es wird die Frage aufgeworfen, durch welchen Raum sie in dieser Zeit gefallen ist.

Damit der Leser leichter beurtheilen könne, ob und wo Herr Forti oder ich sich verrechnet haben, stelle ich unsre Rechnungen nach Mossotti's Formel: $s = \frac{k_{,}^2}{g_{,}} Log . Cos \frac{g_{,}}{k_{,}} t$ neben einander:

Herr Forti denkt sich den Versuch unter dem Aequator angestellt und setzt daher $g' = 9^m,78078$; ausserdem nimmt er $D = 7,778$ und $D' = 0,001293187$ an.

Demgemäss erhält er $g_{,} = 9^m,77834$.

wofür H. Forti angiebt:

$$log \left(\frac{k_{,}^2}{g_{,}}\right) = 4,50679.94.$$

Da nun

$$log \left(\frac{D}{D'} - 1\right) = 3,77913.44$$

$$log\ g' = 0.99037.35$$

$$log \left(\frac{16}{3}\right) = 0.72699.87, \text{ also}$$

$$log\ k_{,}^2 = 5,49650.66, \text{ ausserdem}$$

$$log\ g_{,} = 0.99026.52 \text{ ist, so finde ich:}$$

$$log \left(\frac{k_{,}^2}{g_{,}}\right) = 4,50624.14,$$

Dafür hat H. Forti:

$$\frac{g_{,}}{k_{,}}\, t = 0.2617124 = z$$

Wegen der oben beschriebenen Einrichtung seiner Tafeln hält er es jetzt für nöthig, im zweiten Theil seines Werkes zu diesem hyperbolischen Sektor z durch Interpolation den entsprechenden transcendenten Winkel ω zu berechnen, wo er findet: $\omega = 14^{0}\,49'\,36'',48$ und dann im ersten Theile des Werks durch eine neue Interpolation zu diesem ω sich $log\ Cos\ z$ zu verschaffen, wobei er findet: $log\ Cos\ z = 0.014708$. Wäre er aber von $log\left(\frac{g_{,}t}{k_{,}}\right)$ ausgegangen, so hätte er sofort durch einmalige Interpolation ohne Zuziehung des ω im ersten Theile seines Werkes $log\ Cos\ z$ gefunden, während ich mir erst aus $log\ z$ vermittelst $log\ M$ den Werth von z' verschaffen muss, um zu $log\ Cos\ z$ zu gelangen.

Nun übersieht H. F., dass in der Formel für s nicht vom briggischen, sondern vom hyperbolischen Logarithmen von $Cos\ z$ die Rede ist, er nimmt daher ohne Weiteres $log.\,0,014708$, welcher $= 8.16755.36$ ist. Und da nach seiner Rechnung $log\left(\frac{k_{,}^{2}}{g_{,}}\right) = 4,50679.94$ ist, so hätte er $log\ s_{,} = 2,67435.30$ und $s_{,} = 472,^{m}4468$ erhalten müssen, er findet aber: $s_{,} = 457,^{m}422$ und schliesst: che sarà prossimamente lo spazio...... Ho detto per approssimazione, poichè $\gamma.(n_{,} + n') = \frac{1}{4}$ che soddisfa abbastanza per l'aria e una palla di vetro cava di cinque pollici inglesi, noi l'abbiamo posta per la nostra.

Da, wie gesagt, $log\ s_{,} = 2,67435.30$ ist und ausserdem $log\ M = \underline{9,63778.43}$ ist, so würde $log\ s = 3,03656.87$ und $s = 1087^{m},849$ sein, wenn sonst keine andern Fehler vorgefallen wären.

Weiter ist:

$$log\ t = 1.17609.13$$
$$log\ g_{,} = 0.99026.52$$
$$log\left(\frac{1}{k_{,}}\right) = \underline{7.25174.67}$$
$$log\left(\frac{g_{,}t}{k_{,}}\right) = 9.41810.32 \text{ und}$$
$$\frac{g_{,}t}{k_{,}} = 0.26188.05 = z$$

Nun ist $z' = Mz$, also erhalte ich

$$z' = 0,11373.33$$
$$log\ Cos\ z = 0.01472.6 \text{ und}$$
$$log.(log\ Cos\ z) = 8,16808.48.$$
$$\text{Dazu } log\left(\frac{k_{,}^{2}}{g_{,}}\right) = 4,50624.14$$
$$\text{und } log\left(\frac{1}{M}\right) = \underline{0.36221.57}$$
$$log\ s = 3.03654.19$$
$$s = 1087,^{m}782$$

Da dieses Resultat mit dem gegenüberstehenden ziemlich übereinstimmt, so sieht man, dass die erwähnten andern Fehler sich zufälliger Weise fast neutralisirt haben. (Es ist nämlich die Differenz zwischen dem Unterschiede unserer beiden $log\left(\frac{k_{,}^{2}}{g_{,}}\right)$ und dem Unterschiede unsrer beiden $log.\,(log\ Cos\ z)$ nur $0,00002.68$).

Ich will noch die Berechnung des Beispiels nach meiner Formel:

$$s = \frac{k^{2}}{g}.\,Log\ Cos\ \frac{g}{k}\,t$$

angeben.

$$log\ g = 0,99030.13$$
$$log\left(\frac{16}{3}\right) = 0.72699.87$$
$$log\left(\frac{D}{D'}\right) = \underline{3,77920.66}$$
$$log\ k^{2} = 5.49650.66\ (= k_{,}^{2})$$
$$log\left(\frac{k^{2}}{g}\right) = 4,50620.53$$
$$log\left(\frac{g}{k}\,t\right) = 9,41813.93 = log\ z$$
$$log\ z' = 8,05592.36$$
$$z' = 0.11374.28$$
$$log\ Cos\ z = 0,014728$$
$$log\ (log\ Cos\ z) = 8.16814.38$$
$$log\left(\frac{k^{2}}{g}\right) = 4.50620.53$$
$$log\left(\frac{1}{M}\right) = \underline{0.36221.57}$$
$$log\ s = 3.03656.48$$
$$s = 1087,^{m}839.$$

Im luftleeren Raume würde diese Kugel in der angegebenen Zeit 1100^m,338 fallen, also nur 12½ Meter mehr als im lufterfüllten Raume.

§ 49.

Nunmehr wollen wir uns wegen der beabsichtigten Vergleichung mit den frühern drei Kugeln die letzte Kugel, deren Radius $r = 3{,}1862$ pr. F. ist, durch irgend eine vulcanische Kraft 4443 pr. F. hoch geschleudert denken, und wie in § 45 bis § 47, $\log g = 1{,}49479.21$ und $\frac{D'}{D} = \frac{1}{7500}$ annehmen. Dann erhalten wir durch unsre in § 44 für's Steigen und Fallen zusammengestellten Gleichungen folgende Resultate:

$\log k^2 = 6.60012.50$	$a = 536.245$	$\vartheta = 16{,}76605$	$c = 4600{,}8$	$Q = 1{,}04.$
$k = 1995{,}549$	$a_, = 517.87$	$\vartheta_, = 16{,}962$	$t' = 17'',159$	

§ 50.

Unter der Voraussetzung, dass die vier erwähnten Kugeln durch senkrechtes Steigen vermöge einer gewissen Anfangsgeschwindigkeit alle ein und dieselbe Höhe von $H = 4443$ pr. Fuss erreichen sollen, und dass für alle Kugeln $g' = 31\frac{1}{4}$ pr. F, $\frac{D'}{D} = \frac{1}{7500}$ und der Widerstandscoefficient $\delta' = \frac{1}{2}$ angenommen wird, ergeben die zur Vergleichung geeigneten Resultate der vorigen §§ folgende

Zusammenstellung:

Radius in pr. F.	a	Secunden		$a_,$	k	Vacuum		Q
		ϑ	$\vartheta_,$			c	t'	
0,077898 (Hutton)	1260,5	13,263	21,014	302,88	312,02	25420	40'',338	5,72
0,11531812 (D. Bernoulli)	919,39	14,327	19,656	350,89	379,64	13524	29'',421	3,04
0,45	599,16	16,179	17,566	468,11	749,94	5743,8	19'',173	1,29
3,1862 (Forti)	536,24	16,766	16,962	517,87	1995,55	4600,8	17'',159	1,04

wo a die Anfangsgeschwindigkeit ist, mit der die Kugeln in die Höhe geschleudert werden müssen, um die Höhe von $H = 4443$ pr. F. zu erreichen, ϑ die Zeit angiebt, die dabei verfliesst, $\vartheta_,$ die Zeit, welche die Kugeln gebrauchen, um wieder bis zur Ausgangsstelle herabzufallen, $a_,$ die Endgeschwindigkeit, mit welcher sie daselbst anlangen, k die grösste Geschwindigkeit, welche die Kugeln beim etwanigen weiteren Fallen überhaupt erlangen können, c die Höhe, zu welcher sich bei der jedesmaligen Anfangsgeschwindigkeit die Kugeln im leeren Raum erheben würden, t' die dazu nöthige Zeit und Q das Verhältniss zwischen H und dem zugehörigen c.

Es wird gut sein, des leichtern Vergleichs wegen noch zu wiederholen, dass wenn die Kugeln im luftleeren Raum 4443 pr. F. steigen und dann fallen sollen, $a = a_, = 526{,}9608$ und $\vartheta = \vartheta_, = 16'',86274$ sein müsste.

§ 51.

Ich gehe zu einer Aufgabe Euler's über, welche in dessen Mechanica § 450 vorkommt und auf die ich schon in § 46 hingedeutet habe.

Die Aufgabe lautet: Aus der Zeit Θ, in welcher eine aus B aufwärts geworfene Kugel in einem nach dem Quadrat der Geschwindigkeit widerstehenden Mittel wiederum nach B herabfällt und aus der absoluten Schwerkraft G die Höhe BA zu bestimmen, zu welcher der Körper gelangt, ferner die anfängliche Geschwindigkeit in B und die endliche (finalem) nach dem Herabfallen in B, so wie auch die Zeit des Aufsteigens durch BA und die Zeit des Herabfallens durch AB.

Zur Erläuterung der Aufgabe führe ich an, dass es Euler bei der celeritas initialis und celeritas finalis nicht um unser a und $a_,$ zu thun ist, sondern bei jener um $c =$ altitudo generans celeritatem in B qua corpus ascendit oder deutlicher altitudo debita celeritati qua corpus ascensum inchoat und bei dieser um $c_, =$ altitudo generans celeritatem qua decidit in B oder altitudo debita celeritati qua corpus delabitur, wo also $c = \frac{a^2}{2g'}$ und $c_, = \frac{a_,^2}{2g'}$ ist. Auch versteht Euler unter G (sollicitans potentia absoluta uniformis) weder unser g' noch g, sondern $\frac{g}{g'} = \frac{D - D'}{D} = \frac{7499}{7500}$.

Endlich habe ich noch, bevor ich zu Euler's Auflösung der vorstehenden Aufgabe übergehe, von dem zu sprechen, was er den Exponenten des Widerstandes nennt. Seine Erklärung (§ 376) lautet: Der Exponent des Widerstandes ist die Höhe, welche derjenigen Geschwindigkeit zukommt, bei der der Körper, wenn er sie hat, einen der Schwerkraft gleichen Widerstand erleidet.*) Ich werde diesen Exponenten mit h bezeichnen. (Bei Euler steht dafür k). Nun drückte in unserer obigen Formel (§ 44): $\frac{dv}{dt} = g - g\frac{v^2}{k^2}$, g die Schwere und $g\frac{v^2}{k^2}$ den Widerstand aus; die Geschwindigkeit v also, von der in der Definition die Rede ist, muss so beschaffen sein, dass $g\frac{v^2}{k^2} = g$, oder $v = k$ ist. Wenn wir nicht schon wüssten, dass k die grösste Geschwindigkeit ist, welche der Körper beim Fallen in einem widerstehenden Mittel von constanter Dichtigkeit jemals erlangen kann, so könnten wir zu dieser Einsicht durch die blosse Ansicht der voranstehenden Differentialgleichung gelangen, da $\frac{dv}{dt}$ nicht negativ werden kann. Doch ist h nicht etwa, wie man nach der Difinition erwarten sollte, $= \frac{k^2}{2g'}$, sondern $= \frac{k^2}{2g}$ zu setzen, wovon man sich durch den Schluss des § 55 und durch § 58 überzeugen wird. Und weil Euler es für gut befunden hat, h nicht in rheinl. oder pr. Fussen, sondern in Skrupeln, deren 1000 auf einen Fuss gehen, anzugeben, so ist bei ihm

$$h = 1000 . \frac{k^2}{2g} = \frac{4}{3\delta'} . \frac{D}{D'} r . 1000.$$

Für das bald nachfolgende Zahlenbeispiel setzt Euler $h = 2250000$ Skrupel, daraus lässt sich ermessen, welcher Werth für δ' ihm zufolge anzunehmen ist, nämlich:

$$\delta' = {}^4\!/\!_3 . \frac{D}{D'} \frac{1000}{h} . r = \frac{40}{9} . r.$$

Zwar hat Euler in dem Beispiel den Radius der Kugel nicht angegeben, da er sich aber, wie schon in § 46 erwähnt, auf die Petersburger Commentarien bezieht, so

*) Im Original steht: Exponens resistentiae est altitudo debita celeritati ei, quam si corpus habet, resistentiam patitur aequalem vi gravitatis.

haben wir $r = 0{,}1153181$ pr. F. zu setzen, wonach aus seinen Annahmen folgen würde, dass $\delta' = 0{,}512525$ ist.

Um die folgenden Formeln zu verstehen, muss man auch noch beachten, dass Euler als Zeiteinheit nicht die Secunde, sondern ihren 250sten Theil gewählt hat, worüber er sich § 223 ausspricht.

Nach diesen Vorbereitungen gebe ich andeutungsweise Euler's Auflösung des obigen Problems.

Durch § 445 mit § 427 erhält er folgende zwei Gleichungen:

$$\vartheta = 2\sqrt{\frac{h}{G}}\, arc.tg \sqrt{e^{\frac{x}{h}} - 1}, \quad \vartheta_{,} = 2\sqrt{\frac{h}{G}}\, Log.\left(\sqrt{e^{\frac{x}{h}}} + \sqrt{e^{\frac{x}{h}} - 1}\right)$$

wo ϑ und $\vartheta_{,}$ die uns schon bekannte Bedeutung haben und x die gesuchte Höhe $A\,B$ ist.

Aus denselbigen entwickelt er die Reihen:

$$\vartheta_{,} + \vartheta = \Theta = 4\sqrt{\frac{x}{G}} + \frac{x^2}{120\,h^2}\sqrt{\frac{x}{G}} - \frac{x^4}{23040\,h^4}\sqrt{\frac{x}{G}}\cdots$$

$$\vartheta_{,} - \vartheta = \frac{x}{3\,h}\sqrt{\frac{x}{G}} - \frac{x^3}{672\,h^3}\sqrt{\frac{x}{G}}\cdots$$

Dann findet er vermittelst Umkehrung der ersten Reihe:

$$\sqrt{x} = \frac{\sqrt{G}}{2^2}\,\Theta - \frac{G^2.\sqrt{G}.\Theta^5}{2^{15}.15\,h^2} + \frac{G^4.\sqrt{G}.\Theta^9}{2^{29}.15\,h^4}\cdots$$

und indem er diese Reihe quadrirt, gelangt er zu folgendem Ausdruck:

$$x = \frac{G.\Theta^2}{2^4} - \frac{G^3.\Theta^6}{2^{16}.15\,h^2} + \frac{G^5.\Theta^{10}}{2^{26}.225\,h^4}\cdots$$

Nachdem er auf diese Weise x gefunden hat, geben ihm die beiden ersten Reihen ϑ und $\vartheta_{,}$.

Um endlich c und $c_{,}$ zu erlangen, bedient er sich zweier Gleichungen, welche er § 445 und § 420 aufgestellt hat und welche lauten:

$$c = G.h.\left(e^{\frac{x}{h}} - 1\right) \text{ und } c_{,} = G\,h\left(1 - e^{-\frac{x}{h}}\right).$$

Als Zahlenbeispiel benutzt Euler einen Versuch Günther's, von dem schon in § 46 die Rede war. Danach fiel eine aus einem Geschütz empor geworfene eiserne Kugel nach 34 Secunden zur Erde zurück, so dass nach der Einrichtung der vorstehenden Gleichungen $\Theta = 8500$ zu setzen ist. Dass $h = 2250000$ Skrupel und $G = \frac{7499}{7500}$ zu nehmen ist, habe ich schon angeführt. Natürlich erhält man x zunächst in Skrupeln ausgedrückt. Den Erfolg der Rechnung mit diesen Zahlen stelle ich 1) nach Euler, 2) nach seinem Uebersetzer Herrn Prof. Dr. Wolfers, I, pag. 425 und 3) wie er sich bei mir ergeben hat, nebeneinander. Es ist:

		nach Euler	nach Wolfers	nach meiner Rechnung
$\frac{\Theta}{4}\sqrt{\frac{G}{h}}$	=	1.416572	1,41658	1,416572
$-\frac{\Theta^5.G^2}{2^{15}.3.5\,h^2}\sqrt{\frac{G}{h}}$	=	− 0.01188	− 0,01194	− 0,011884
$+\frac{\Theta^9.G^4}{2^{29}.3.5.h^4}\sqrt{\frac{G}{h}}$	=	+ 0.0007477	+ 0,00076	+ 0,0007477
Also $\sqrt{\frac{x}{h}}$	=	1.405439	1,40540	1,405436
$\sqrt{x}$	=	2108,159	2108,1	2108,154
x	=	4443	4441,1	4444,312 rheinl. F.

Nun bezeichnet Euler mit δ die Anzahl Secunden, um welche die niedersteigende Bewegung länger dauert als die aufsteigende, und giebt der obigen Gleichung für $\vartheta_{,}-\vartheta$ folgende Gestalt:

$$250\,\delta.\sqrt{\frac{G}{h}}=\frac{x}{3h}\sqrt{\frac{x}{h}}-\frac{x^3}{872\,h^3}\sqrt{\frac{x}{h}}\ldots$$

Er findet hier $\sqrt{\frac{x}{h}}=\frac{527}{375}$, was $=1{,}405333$ wäre, statt seiner obigen Angabe 1,405439.

Ferner ist 1) nach Euler:		2) nach Wolfers (für $\sqrt{\frac{x}{h}}=1{,}4054$):
das erste Glied der Reihe	$=0{,}9913$	$0{,}9253$
das zweite	$=-0{,}01893$	$-0{,}0161$
Also $250\,\delta.\sqrt{\frac{G}{h}}$	$=0{,}97237$	$0{,}9092$
und $\delta=5''\,50'''$	$=5'',83$	$5'',46$
Mithin	$\vartheta=14'',08$	$14'',27$
	$\vartheta_{,}=19'',92$	$19'',73$

Bedeutender sind die Unterschiede in der Bestimmung des c und $c_{,}$ bei den beiden Rechnern hervorgetreten; während Euler $c=15542$ und $c_{,}=1969$ Fuss erhält, findet Wolfers: $c=13967$ und $c_{,}=1938$.

§ 52.

Da die mitgetheilten Reihen Euler's offenbar zu wenig Glieder haben, um ein einigermassen genaues Resultat aus ihnen ableiten zu können, und da ich ausserdem eine Controlle der vorigen Rechnungen wünschte, so entschloss ich mich, die obigen Formeln 3) und III) in § 44 gleichfalls in Reihen zu verwandeln. Diese beiden Gleichungen, welche für unsern Zweck lauten:

$$-\frac{g}{k^2}H=Log\,cos\,\frac{g}{k}\vartheta \text{ und } \frac{g}{k^2}H=Log\,Cos\,\frac{g}{k}\vartheta_{,}, \text{ bringe ich,}$$

indem ich $\frac{g}{k^2}H=S$ und $\frac{g}{k}\vartheta=T$, $\frac{g}{k}\vartheta_{,}=T_{,}$ setze, auf folgende Form: $e^{-S}=cos\,T$ und $e^{S}=Cos\,T_{,}$ und leite aus den letztern ab:

$$sin\left(\frac{T}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-e^{-S}}{2}} \text{ und } Sin\left(\frac{T_{,}}{2}\right)=\sqrt{\frac{e^{S}-1}{2}}, \text{ oder}$$

$$sin\left(\frac{T}{2}\right)\begin{cases}=\sqrt{\frac{S}{2}}\left(1-\frac{S}{2}+\frac{S^2}{6}-\frac{S^3}{24}+\frac{S^4}{120}-\frac{S^5}{720}+\frac{S^6}{5040}-\right)^{\frac{1}{2}}\\=\sqrt{\frac{S}{2}}\left(1-\frac{S}{4}+\frac{5\,S^2}{96}-\frac{S^3}{128}+\frac{79.S^4}{92160}-\frac{3.S^5}{40960}+\frac{71.S^6}{12386304}-\ldots\right)=V\end{cases}$$

und

$$Sin\left(\frac{T_{,}}{2}\right)\begin{cases}=\sqrt{\frac{S}{2}}\left(1+\frac{S}{2}+\frac{S^2}{6}+\frac{S^3}{24}+\frac{S^4}{120}+\frac{S^5}{720}+\frac{S^6}{5040}+\ldots\right)^{\frac{1}{2}}=\\=\sqrt{\frac{S}{2}}\left(1+\frac{S}{4}+\frac{5\,S^2}{96}+\frac{S^3}{128}+\frac{79.S^4}{92160}+\frac{3.S^5}{40960}+\frac{71\,S^6}{12386304}+\ldots\right)=W\end{cases}$$

Da nun $\frac{T}{2}=V+\frac{V^3}{6}+\frac{3\,V^5}{40}+\frac{5\,V^7}{112}+\frac{35\,V^9}{1152}+\frac{63\,V^{11}}{2816}+\frac{231\,V^{13}}{13312}+\ldots$

und nach meiner Abhandlung über die kubischen Geichungen pag. 54:

$$\frac{T_{,}}{2}=W-\frac{W^3}{6}+\frac{3\,W^5}{40}-\frac{5\,W^7}{112}+\frac{35.W^9}{1152}-\frac{63\,W^{11}}{2816}+\frac{231\,W^{13}}{13312}-\ldots \text{ ist,}$$

so erhält man nach den nöthigen Zwischenrechnungen:

$$\begin{cases} \frac{T}{2} = \sqrt{\frac{S}{2}}\left(1 - \frac{S}{6} + \frac{S^2}{120} + \frac{S^3}{336} - \frac{S^4}{5760} - \frac{19.S^5}{2^8.5.9.11} + \frac{79.S^6}{2^{10}.3.5.7.9.13}\cdots\right) \\ \frac{T_{,}}{2} = \sqrt{\frac{S}{2}}\left(1 + \frac{S}{6} + \frac{S^2}{120} - \frac{S^3}{336} - \frac{S^4}{5760} + \frac{19.S^5}{2^8.5.9.11} + \frac{79.S^6}{2^{10}.3.5.7.9.13}\cdots\right). \end{cases}$$

Mithin ist:

$$\begin{cases} T_{,} + T = 4\sqrt{\frac{S}{2}} + \frac{S^2}{30}\sqrt{\frac{S}{2}} - \frac{S^4}{1440}\sqrt{\frac{S}{2}} + \frac{79.S^6}{2^8.3.5.7.9.13}\sqrt{\frac{S}{2}}\cdots \\ T_{,} - T = \frac{2.S}{3}\sqrt{\frac{S}{2}} - \frac{S^3}{84}\sqrt{\frac{S}{2}} + \frac{19.S^5}{2^6.5.9.11}\sqrt{\frac{S}{2}}\cdots \end{cases}$$

oder:

$$\begin{cases} \vartheta_{,} + \vartheta = \Theta = 4\sqrt{\frac{H}{2g}} + \frac{g^2.H^2}{30k^4}\sqrt{\frac{H}{2g}} - \frac{g^4H^4}{1440k^8}\sqrt{\frac{H}{2g}} + \frac{79.g^6.H^6}{2^8.3.5.7.9.13.k^{12}}\sqrt{\frac{H}{2g}}\cdots \\ \vartheta_{,} - \vartheta = \frac{1}{3}\frac{g.H}{k^2}\sqrt{\frac{H}{2g}} - \frac{g^3H^3}{84k^6}\sqrt{\frac{H}{2g}} + \frac{19.g^5H^5}{2^6.5.9.11.k^{10}}\sqrt{\frac{H}{2g}}\cdots \end{cases}$$

Vergleicht man diese beiden Reihen für Θ und $\vartheta_{,} - \vartheta$ mit den entsprechenden Reihen Euler's im vorigen §, so sieht man, dass sie in einander übergehen, wenn man $x = \frac{H}{2}$, $h = \frac{k^2}{4g}$ und $G = g$ annimmt. Damit soll natürlich nicht gesagt sein, dass zwischen den bezeichneten Grössen wirklich eine Gleichheit statt findet; im Gegentheil, wir wissen ja, dass $x = H$, $h = 1000.\frac{k^2}{2g}$ und $G = \frac{g}{g'}$ ist. Das etwa hierin Auffällige verliert sich, wenn man sich erinnert, dass Euler von andern Einheiten des Raum's und der Zeit ausgeht, als denen, die heutiges Tages gebräuchlich sind. Demnach würden die entsprechenden Reihen Euler's mit Hinzuziehung der von mir gefundenen Glieder also lauten:

$$\Theta = 4\sqrt{\frac{x}{G}} + \frac{x^2}{2^3.3.5.h^2}\sqrt{\frac{x}{G}} - \frac{x^4}{2^9.5.9.h^4}\sqrt{\frac{x}{G}} + \frac{79.x^6}{2^{14}.3.5.7.9.13.h^6}\sqrt{\frac{x}{G}}\cdots$$

$$\begin{cases} \vartheta_{,} - \vartheta = \frac{x}{3h}\sqrt{\frac{x}{G}} - \frac{x^3}{2^5.3.7.h^3}\sqrt{\frac{x}{G}} + \frac{19x^5}{2^{11}.5.9.11.h^5}\sqrt{\frac{x}{G}}\cdots \\ 250.\delta.\sqrt{\frac{G}{h}} = \frac{x}{3h}\sqrt{\frac{x}{h}} - \frac{x^3}{672h^3}\sqrt{\frac{x}{h}} + \frac{19x^5}{2^{11}.495.h^5}\sqrt{\frac{x}{h}}\cdots \end{cases}$$

§ 53.

Ich habe nach Euler's Vorgang die Reihen für Θ umgekehrt und für seine Auffassung erhalten:

$$\sqrt{x} = \frac{\sqrt{G}}{2^2}\Theta - \frac{G^2\sqrt{G}.\Theta^5}{2^{15}.3.5.h^2} + \frac{G^4.\sqrt{G}.\Theta^9}{2^{29}.3.5.h^4} - \frac{109.G^6.\sqrt{G}.\Theta^{13}}{2^{43}.5^2.7.13h^6}\cdots{}^{*)}$$

Durch Quadrirung derselben finde ich:

$$x = \frac{G.\Theta^2}{2^4} - \frac{G^3.\Theta^6}{2^{16}.3.5.h^2} + \frac{G^5.\Theta^{10}}{2^{28}.3^2.5^2.h^4} - \frac{67.G^7.\Theta^{14}}{2^{39}.3^2.5^2.7.13h^6}\cdots$$

Für meine Bezeichnung hat sich ergeben:

$$H = \frac{g.\Theta^2}{2^3} - \frac{g^5.\Theta^6}{2^{11}.3.5.k^4} + \frac{g^9.\Theta^{10}}{2^{17}.3^2.5^2.k^8} - \frac{67.g^{13}.\Theta^{14}}{2^{26}.3^2.5^2.7.13.k^{12}}\cdots$$

Demgemäss erhalte ich nach Euler's Auffassung für das obige Beispiel:

$$\sqrt{\frac{x}{h}} = 1.416572 - 0,011884 + 0.000747.7 - 0.000068.4 = 1,405368,$$

$$\sqrt{x} = 2108,051,\ x = 4443,882 \text{ rheinl. Fuss.}$$

Ferner: $250.\delta.\sqrt{\frac{G}{h}} = 0,92522.79 - 0.01611.24 + 0.00079.16$
$= 0,90990.71,$

also $\delta = 5'',459806$, $\vartheta = 14'',270097$, $\vartheta_{,} = 19'',729903$.

*) Benzenberg, pag. 214, bringt unter andern auch die 7te Potenz von Θ in die Reihe für $\sqrt{x}$.

Wie man sieht, genügen auch die von mir hinzugefügten Glieder uoch nicht, um das Resultat auf 6 Decimalstellen, auf welche Euler die Rechnung angelegt hat, verbürgen zu können; man müsste zu diesem Zwecke wahrscheinlich die Reihen für $\sqrt{x}$ und δ noch um zwei Glieder verstärken. Doch wäre das einerseits viel zu mühsam und ist auch andererseits nicht nöthig, da sich bald ein bequemerer Weg zeigen wird, den Werth von $x = H$, von ϑ und $\vartheta_,$ genau zu finden.

§ 54.

Was $c = \frac{a^2}{2g'}$ und $c_, = \frac{a_,^2}{2g'}$ anbelangt, so finde ich nach den von Euler aufgestellten Formeln:

$$c = G.h.\left(e^{\frac{x}{h}} - 1\right) \text{ und } c_, = G.h.\left(1 - e^{-\frac{x}{h}}\right),$$

wenn ich seine Raumgrösse $x = 4443$ pr. F. zum Grunde lege,

$$c \;= 16207{,}332 - 2249{,}700 = 13957{,}632 \text{ pr. F.}$$
$$c_, = 2249{,}700 - 312{,}2753 = 1937{,}425 \text{ pr. F.}$$

In § 451 macht Euler noch die Bemerkung: Erit ergo celeritas ascendens in B, (also nach seiner Auffassung c) ad celeritatem descendentem ibidem, (also zu $c_,$) ut $e^{\frac{2h}{x}}$ ad 1. Herr Wolfers hat bei der Uebersetzung dieser Stelle die darin enthaltene Ungenauigkeit übersehen und kommt auch in seinen Anmerkungen und Verbesserungen nicht darauf zurück. Es muss heissen: $c : c_, = e^{\frac{x}{h}} : 1$.

§ 55.

Bevor ich weiter gehe, will ich zeigen, wie die in § 51 hingestellten Gleichungen Euler's aus den von mir entwickelten Formeln abzuleiten sind.

Wir haben schon in § 52 die Gleichung: $-\frac{g}{k^2} H = Log\ cos\ \frac{g}{k}\vartheta$ dadurch, dass wir $\frac{g}{k^2} H = S$ und $\frac{g}{k} = \vartheta\ T$ setzten, auf die Form gebracht: $cos\ T = e^{-S}$. Da demnach $sin\ T = \sqrt{1 - e^{-2S}}$ und $tg\ T = \sqrt{e^{2S} - 1}$ ist, so hat man:

$$T = ar.tg\sqrt{e^{2S} - 1}, \text{ oder } \vartheta = \frac{k}{g}\, ar.tg\sqrt{e^{\frac{2g}{k^2}H} - 1}.$$

Aber die Euler'sche Gleichung: $\vartheta = 2\sqrt{\frac{h}{G}}.\, arc.tg\left(\sqrt{e^{\frac{x}{h}} - 1}\right)$ nimmt dieselbe Gestalt an, wenn wir, wie in § 52, $x = \frac{H}{2}$, $h = \frac{k^2}{4g}$ und $G = g$ setzen.

Die analoge Gleichung: $\frac{g}{k^2} H = Log\ Cos\ \frac{g}{k}\vartheta_,$ haben wie in § 52 auf die Form: $Cos\ T_, = e^S$ gebracht, wo $T_, = \frac{g}{k}\vartheta_,$ bedeutet. Daraus ergiebt sich: $Sin\ T_, = \sqrt{e^{2.S} - 1}$, $Tg\ T_, = \sqrt{1 - e^{-2.S}}$, $T_, = Ar\ Tg\sqrt{1 - e^{-2.S}}$. Um aber mit Euler

zusammenzutreffen, müssen wir uns erinnern (§ 8, 3), dass $Ar.\,Tg\,y = \frac{1}{2}\,Log\,\frac{1+y}{1-y}$ $= \frac{1}{2}\,Log\,\frac{(1+y)^2}{1-y^2}$ ist. Demnach ist:

$$T_{,} = \frac{1}{2}\,Log\,\frac{(1+\sqrt{1-e^{-2.S}})^2}{e^{-2.S}} = Log\,(e^S + \sqrt{e^{2.S}-1}) = Log\,(\sqrt{e^{2.S}} + \sqrt{e^{2.S}-1})$$

$$\text{und } \vartheta_{,} = \frac{k}{g}\,Log\left(\sqrt{e^{\frac{2g}{k^2}H}} + \sqrt{e^{\frac{2g}{k^2}H}-1}\right).$$

Dafür hat Euler:

$$\vartheta_{,} = 2.\sqrt{\frac{h}{G}}.\,Log\left(\sqrt{e^{\frac{x}{h}}} + \sqrt{e^{\frac{x}{h}}-1}\right)$$

was mit dem Vorigen übereinstimmt, wenn wir wieder die oben angegebenen Substitutionen machen.

Ferner haben wir entwickelt: $H = \frac{k^2}{2g}\,Log\left(1+\frac{a^2}{k^2}\right)$, d. h. $e^{\frac{2g}{k^2}H} = 1 + \frac{a^2}{k^2}$ oder $a^2 = k^2.\left(e^{\frac{2gH}{k^2}} - 1\right)$. Mithin ist: $c = \frac{a^2}{2g'} = \frac{k^2}{2g'}\left(e^{\frac{2gH}{k^2}} - 1\right)$, wofür Euler hat: $c = G.h\left(e^{\frac{x}{h}} - 1\right)$. Hier, wo nicht Raum- und Zeitgrössen unter einander, sondern nur Raumgrössen mit einander verbunden sind, gelingt die Herüberführung der einen Form auf die andere, wenn man der Wirklichkeit gemäss $x = H$, $h = \frac{k^2}{2g}$ und $G = \frac{g}{g'}$ setzt.

Ebenso leiten wir aus $H = -\frac{k^2}{2g}\,Log\left(1-\frac{a_{,}^2}{k^2}\right)$ nach einander ab: $e^{-\frac{2gH}{k^2}}$ $= 1 - \frac{a_{,}^2}{k^2}$, $a_{,}^2 = k^2\left(1 - e^{-\frac{2gH}{k^2}}\right)$, $c_{,} = \frac{a_{,}^2}{2g'} = \frac{k^2}{2g'}.\left(1 - e^{-\frac{2gH}{k^2}}\right)$, was mit der Euler'schen Gleichung: $c_{,} = G.h.\left(1 - e^{-\frac{x}{h}}\right)$ wegen der erlaubten Substitutionen $x = H$ u. s. w. identisch ist. Würde ich mich aber streng an die Euler'sche Definition des Widerstandsexponenten gehalten und $h = \frac{k^2}{2g'}$ gesetzt haben, so wäre die Hinüberleitung unserer Formeln in die Euler'schen nicht völlig gelungen.

§ 56.

Doch es wird Zeit sein, dass wir das Euler'sche Problem durch Benutzung der am Ende des § 44 zusammengestellten geschlossenen Functionen auflösen. Dieselbigen lauten für unsern gegenwärtigen Zweck also:

Für's Steigen:	Für's Fallen:
1) $a = k\,.\,tg\,\frac{g}{k}\,\vartheta$	I) $a_{,} = k\,.\,Tg\,\frac{g}{k}\,\vartheta_{,}$
2) $H = \frac{k^2}{2g}\,Log\left(1+\frac{a^2}{k^2}\right)$	II) $H = -\frac{k^2}{2g}\,Log\left(1-\frac{a_{,}^2}{k^2}\right)$
3) $H = -\frac{k^2}{g}\,Log\,.\,cos\,\frac{g}{k}\,\vartheta$	III) $H = \frac{k^2}{g}\,.\,Log\,Cos\,\frac{g}{k}\,\vartheta_{,}$.

Zunächst beschäftigen wir uns mit den letzten Gleichungen 3) und III).

Unter der Voraussetzung, dass wieder $S = \frac{g\,H}{k^2}$, $T = \frac{g}{k}\,\vartheta$, $T_{,} = \frac{g}{k}\,\vartheta_{,}$ gesetzt wird, nehmen sie, wie schon bekannt, die Gestalt an: $Cos\, T_{,} = e^S$ und $cos\, T = e^{-S}$. Wir wissen, dass $\vartheta_{,} + \vartheta = \Theta = 34''$ gegeben ist, und wollen aus diesen Gleichungen ϑ, $\vartheta_{,}$ und H ableiten. Durch Multiplication derselben ergiebt sich:

$$Cos\, T_{,} \,.\, cos\, T = 1,$$

wobei wir, wie bekannt, $T_{,}$ als eine hyperbolische Arc und T als eine cyklische Arc aufzufassen haben. Verstehen wir unter z und ω zwei zusammengehörige Arcn an der Hyperbel und dem damit verbundenen Kreis, so ist nach § 4: $Cos\, z = sec\, \omega = \frac{1}{cos\, \omega}$, oder es ist:

$$Cos\, z \,.\, cos\, \omega = 1.$$

Nun hindert nichts $T_{,} = z$ zu setzen, damit hat man zugleich $T = \omega$. Mithin ist:

$$z + \omega = \frac{g}{k} \,.\, (\vartheta_{,} + \vartheta) = \frac{g}{k}\,\Theta = K.$$

Man braucht also nur in cyklisch-hyperbolischen Tafeln die Stelle aufzusuchen, wo die neben einander stehenden z und ω zusammen ein gegebenes K ausmachen und das ganze Problem ist mit einem Schlage gelöst.

Da nach Gudermann § 48, auch schon nach meiner „Auflösung der kubischen Gleichungen“ § 37 $z > \omega$ ist und da $\vartheta_{,} : \vartheta = z : \omega$, so erkennt man zugleich, dass sich immer $\vartheta_{,} > \vartheta$ finden wird, womit zusammenhängt, was auch schon aus § 44 erhellte, dass stets $a_{,} < a$ ist.

Für Euler's Beispiel ist, wie wir aus § 45 wissen:

$log\, g = 1{,}49479.21$, und aus $h = 2250000 = 1000 \,.\, \frac{k^2}{2\,g}$ folgt, dass $k = 374{,}975$ und $log\, k = 2{,}57400.23$ ist. Daher haben wir:

$$z + \omega = 2{,}8331444 \text{ oder } Mz + M\omega = 1{,}230419,$$

d. h. $z' + \omega' = 1{,}23042$, wo $\omega' = M\omega$ bedeutet. Wenn meine Tafeln statt der cyklischen Winkel ω'' ihre Bogenlängen ω oder vielmehr ω' enthielten, so würde man daraus mit einem Blicke auf pag. 99 übersehen, dass z' zwischen 0,71371 und 0,71405 liegen müsse; aber auch bei der jetzigen Einrichtung derselben wird man nach zwei oder drei Versuchen sich überzeugen, dass $z' = 0{,}71400$ und das dazu gehörige $\omega'' = 68^0\ 7'\ 51''$, d. h. $\omega' = 0{,}51642$ sein muss. Da nun $log \left(M \,.\, \frac{g}{k}\right) = 8{,}55857.41$ ist, so ergiebt sich hieraus ohne alle Mühe

$$\vartheta = 14'',270,\quad \vartheta_{,} = 19'',730 \text{ und in Folge dessen } H = 4444{,}0 \text{ rheinl. F.}$$

Will man genauere Resultate haben, so nehme man Gudermann's erste Tafel, welche die „Längezahlen der Kreisbogen“ angiebt, zur Hand. Hätte Gudermann, statt den cyklischen Winkeln ω'' zwei Rubriken, eine nach alter Eintheilung in 90° und eine nach französischer Eintheilung in 100°, zu widmen, davon eine Rubrik für die entsprechenden Kreisbogen ω verwendet, so würde man bei ihm auf pag. 236 sofort erkennen, dass (sein k oder mein) z zwischen 1,64401.26 und 1,64443.44 liegen müsse. Aber auch bei der nun einmal vorhandenen Einrichtung seiner ersten Tafel wird man, besonders, wenn man schon weiss, dass ω'' ungefähr $= 68^0\ 7'\ 51''$ ist, leicht ermitteln, dass $z = 1{,}64404.11$ und das entsprechende $\omega = 1{,}18910.33$ ist. Dann erhält man: $\vartheta = 14'',270191$ und $\vartheta_{,} = 19'',729807$, also $\Theta = 33'',999998$ statt $34''$ und $\vartheta_{,} - \vartheta = \delta = 5'',459616$, wofür Euler hat: $5'',83$.

Jetzt ergeben beide Formeln 3) und III) übereinstimmend $H = 4443{,}9276$

pr. F.; dann findet man aus den beiden ersten Formeln 1) und I): $a = 934{,}2214$ und $a_{,} = 347{,}99004$ pr. F., woraus sich leicht $c = 13964{,}318$ und $c_{,} = 1937{,}5536$ pr. F. ableiten lässt. Die beiden mittlern Gleichungen 2) und II) zwischen H, a und $a_{,}$ dienen zur Controle; diese wird namentlich dann vollständig befriedigen, wenn man bei der hier vorkommenden Berechnung von $log\ (1 \pm \alpha)$ Hilfswinkel einführt, wobei sich zwischen diesen Hilfswinkeln einerseits und dem jedesmaligen ω und z andererseits eine interessante Uebereinstimmung herausstellen wird.

Auch findet man die Zeit, die der Anfangsgeschwindigkeit a im leeren Raum, oder dem c entsprechen würde, $= 2\,t' = 2.29'',895083 = 59'',790166$, wofür Euler 63″ und Bernoulli 58″ hat.

§ 57.

So interessant das vorstehende Euler'sche Problem ist, so muss man doch gestehen, dass es für die Praxis keinen Gewinn abwirft, da es einerseits die Kenntniss des Widerstandscoefficienten δ' oder des Widerstandsexponenten k voraussetzt, und da andererseits kein geeignetes Mittel vorhanden ist, zu prüfen, in wie weit die berechnete Höhe H oder x mit der wirklich von der Kugel erreichten Höhe übereinstimmt. Deshalb haben Poisson (I. pag. 248), Littrow (in Gehler X, pag. 1751) und Duhamel (Cours de Mécanique, 1862, I, pag. 367) aus anderweitigen Erfahrungen die Anfangsgeschwindigkeit a, mit welcher die Kugel senkrecht emporgeschossen wird, als bekannt angenommen und wollen dann — namentlich die beiden erstgenannten — die beobachtete Zeit Θ, welche während des Steigens und Fallens der Kugel verfliesst, benutzen, um k und damit δ' durch Versuche zu bestimmen. Die Formel, welche diese drei Gelehrten an den angeführten Orten zu dem Zwecke aufgestellt haben, lautet:

$$\frac{g}{k}\,\Theta = arc\ tg\ \frac{a}{k} + Log\ \frac{k}{\sqrt{a^2 + k^2} - a}, \text{ oder}$$

$$= arc\ tg\ \frac{a}{k} + Log\left(\frac{a}{k} + \sqrt{1 + \left(\frac{a}{k}\right)^2}\right).$$

Man wird einräumen müssen, dass die Berechnung des k aus der vorstehenden Gleichung nicht ohne Mühe gelingen wird. Bedeutend leichter wird man zum Ziele gelangen, wenn man sich aus § 8 erinnert, dass $Log\ (\xi + \sqrt{1 + \xi^2}) = Ar\,.\,Sin\ \xi$ ist. Dadurch nämlich geht die vorige Gleichung in folgende über:

$$\frac{g}{k}\,\Theta = ar\,.\,tg\ \frac{a}{k} + Ar\,.\,Sin\ \frac{a}{k}. = \omega + z.$$

Hat man nun ein beliebiges k angenommen, so findet man, da hier die cyklische Tangente und der hyperbolische Sinus einander gleich sind, nämlich $= \frac{a}{k}$, und da in meinen Tafeln diese beiden trigonomischen Functionen in einer und derselben Spalte vorkommen, durch Addition der nebenstehenden und zusammengehörigen ω und z sofort, ob die Summe dem Ausdruck $\frac{g}{k}\,\Theta$ entspricht, und man wird durch Wiederholung dieser leichten Arbeit bald zur genauen Kenntniss von k oder δ' oder h gelangen.

Bei Rechnungen dieser Art wird man hoffentlich ganz besonders inne werden, welchen grossen Vortheil die Verschmelzung der cyklischen und hyperbolischen Tafeln, die ich angestrebt habe, gewährt.

Die vorstehende Gleichung leite ich übrigens aus unsern oben aufgestellten Formeln auf folgende einfache Weise ab:

Aus § 56, 2 und III wissen wir, dass

$$H = \frac{k^2}{2g} Log \left(1 + \frac{a^2}{k^2}\right) = \frac{k^2}{g} Log\ Cos\ \frac{g}{k}\ \vartheta,\ \text{ist.}$$

$$\text{Deshalb ist } Log \sqrt{1 + \frac{a^2}{k^2}} = Log\ Cos\ \frac{g}{k}\ \vartheta, \text{ oder}$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{a}{k}\right)^2} = Cos\ \frac{g}{k}\ \vartheta, = \sqrt{1 + Sin \frac{g}{k}\ \vartheta,^2}.$$

$$\text{Mithin haben wir: } Sin\ \frac{g}{k}\ \vartheta, = \frac{a}{k}, \text{ oder } \vartheta, = \frac{k}{g}\ Ar.Sin\ \frac{a}{k}.$$

$$\text{Nehmen wir dazu § 56, 1}: tg\ \frac{g}{k}\ \vartheta = \frac{a}{k}, \text{ oder } \vartheta = \frac{k}{g}\ ar\,tg\ \frac{a}{k},$$

so haben wir:

$$\vartheta + \vartheta, = \Theta = \frac{k}{g}\left(ar\ tg \frac{a}{k} + Ar.Sin\ \frac{a}{k}\right) = \frac{k}{g}\left(\omega + z\right).$$

Oberflächlich betrachtet, ist diese Gleichung für Θ dieselbe, wie die im vorigen § für K aufgestellte; der Unterschied besteht aber darin, dass dort, wenn aus K wir ω und z gefunden hatten, diese Grössen ω und z uns die Zeiten ϑ und $\vartheta,$ gaben, während hier in der Endgleichung für Θ die nämlichen Grössen ω und z mit den genannten Zeiten nichts mehr zu thun haben, sondern, wenn k gegeben ist, unmittelbar zur Kenntniss der Anfangsgeschwindigkeit a führen, und wenn a gegeben ist, die Auffindung von k ermöglichen.

Aber auch auf Resultate dieser Art wird kein grosses Gewicht zu legen sein, da die hiebei als bekannt vorausgesetzte, durch Pulver und Kanonen gewonnene Anfangsgeschwindigkeit a mit nicht unbedeutenden Fehlern behaftet sein dürfte. Will man das Gesetz des Widerstandes der Medien finden, so muss man die zu diesem Ende zu veranstaltenden Versuche so einrichten, dass sie von allen fremden Elementen möglichst befreit sind. Und das ist von einfachen Fallversuchen zu erwarten, ich wende mich daher zu solchen.

§ 58.

Der erste, dessen Fallversuche für uns einen Werth haben, ist zugleich derjenige, dessen Theorie des Fallens im widerstehenden Mittel noch heute in Ansehn steht. Und dies ist Newton. Die hierauf bezüglichen Resultate seiner tiefen Untersuchungen finden wir vorzugsweise in der 8ten, 9ten, 37sten, 38sten, 39sten und 40sten Propositio des zweiten Buches seiner Principien.

Newton nennt das Gewicht der fallenden Kugel im leeren Raum A, im widerstehenden Mittel B, so dass $A : A - B = D : D'$ ist. Dann fasst er F als einen Raum auf, der mit $\frac{4}{3}$ des Kugeldurchmessers $(2r)$ und mit den Dichtigkeiten der Kugel und des widerstehenden Mittels folgende Proportion bildet: $F : \frac{4}{3}.2\,r = D : D'$, so dass also $F = \frac{8}{3}\cdot\frac{D\,r}{D'}$ ist. Unter G, wofür ich $\tau,$ setzen werde, versteht er die Zeit, in welcher der Körper mit seinem relativen Gewicht B, ohne einen Widerstand zu erfahren, durch den Raum F fallen würde, so dass also $\tau, = \sqrt{\frac{2F}{g}}$ ist. Ferner ist bei ihm H die Geschwindigkeit, welche der Körper bei diesem seinem Fallen (hocce casu suo) erlangt, und da er beweisst, dass dieses H zugleich die grösste Geschwin-

digkeit ist, mit welcher die Kugel bei ihrem Gewichte B im widerstehenden Mittel überhaupt fallen kann, so müssen wir der Uebereinstimmung mit unserer frühern Bezeichnung wegen k statt H setzen und haben $k = g\tau_,$. Daraus ergiebt sich: $\frac{k^2}{g} = g\tau_,^2 = 2F$, so dass Newton's F = Euler's h ist, d. h. Euler's Exponent des Widerstandes ist nichts anders als Newton's F, wenn ich, wie ich mir in § 51 erlaubt habe, $h = \frac{k^2}{2g}$ und nicht etwa $= \frac{k^2}{2g'}$ setze. Eliminirt man g aus den beiden letzten Gleichungen $k = g\tau_,$ und $2F = \frac{k^2}{g}$, so erhält man: $k = \frac{2F}{\tau_,}$. Newton bemerkt noch ausdrücklich, dass der Widerstand, welchen die Kugel bei dieser ihrer grössten Fallgeschwindigkeit erleidet, ihrem Gewicht B gleich ist, und dass er ihn im Uebrigen dem Quadrat der jedesmaligen Geschwindigkeit proportional setzt.

Nun ist nach unsrer Auffassung in § 42:

$$k^2 = \frac{8}{3.\delta'} \cdot g \cdot \frac{D.r}{D'}, \text{ also } \frac{k^2}{2g} = \frac{8}{3.2.\delta'} \frac{D.r}{D'} = F.$$

Da aber nach Newton's Darstellung $F = \frac{8}{3} \cdot \frac{D.r}{D'}$ ist, so sieht man, dass nach seiner Theorie $\delta' = \frac{1}{2}$ ist, wie ich oben gesagt habe.

Nachdem Newton noch angeführt hat, dass er nur denjenigen Widerstand berüksichtigen wolle, welcher eine Folge der Trägheit der flüssigen Materie ist, dass er, was sonst auf ihn Einfluss haben könnte, z. B. ihre Elasticität, ihre Zähigkeit, die Reibung ihrer Theile unter einander, spätern Forschungen anheim gebe, setzt er

$$N = num.\ log\left(M\,\frac{2t}{\tau'}\right) = e^{\frac{2t}{\tau'}} \text{ und } l = log\,\frac{N+1}{N}, \left(\text{oder } L = Log\,\frac{N+1}{N}\right)$$

und kommt durch Reflexionen an einem Kreise und der zugehörigen gleichseitigen Hyperbel u. a. zu folgenden zwei Gleichungen zwischen Geschwindigkeit (v), Zeit (t) und Raum (s):

$$1)\ v = k \cdot \frac{N-1}{N+1},$$

$$2)\ s = \frac{2t}{\tau_,} F - 1{,}3862943611 \,.\, F + 4{,}605170186 \,.\, F \,.\, l.$$

§ 59.

Zunächst wollen wir zeigen, dass diese Gleichungen Newton's mit den unsrigen, welche wir in § 44, I) und III) aufgestellt haben, identisch sind.

1) Da $\frac{N-1}{N+1} = \frac{e^{\frac{t}{\tau_,}} - e^{-\frac{t}{\tau_,}}}{e^{\frac{t}{\tau_,}} + e^{-\frac{t}{\tau_,}}}$, da ferner nach § 58 $\tau_, = \frac{k}{g}$ und nach § 3 und § 6, 3)

$$\frac{e^{\xi} - e^{-\xi}}{e^{\xi} + e^{-\xi}} = Tg\,\xi \text{ ist, so hat man sofort:}$$

$$\frac{N-1}{N+1} = Tg\,\frac{gt}{k} \text{ und } v = k \,.\, Tg\,\frac{gt}{k}.$$

Ich habe schon gesagt, dass Newton in seiner 9ten Proposition die Abhängigkeit zwischen v und t in einer Weise aussprach, die der unsrigen ziemlich nahe kam, (si tangentes angulorum ... sectoris hyperbolici sumantur velocitatibus proportionales, erit tempus omne .... descendendi a loco summo ut sector hyperbolae); wenn er jetzt, wo er rechnen will, den Zusammenhang der Grössen v und t durch N ver-

mittelt, so geschah das eben nur, weil zu seiner Zeit es weder eine hyperbolische Trigonometrie, noch weniger hyperbolisch-trigonometrische Tafeln gab.

2) Aus $s = \frac{k^2}{g}$ *Log Cos* $\frac{g}{k}\, t$ folgt nach dem vorigen §:

$s = 2\, F\,.\, Log\; Cos \left(\frac{t}{\tau_{\prime}}\right)$. Weil nun $Cos\; z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{e^z}{2}\left(1 + \frac{1}{e^{2z}}\right)$,

so ist $Log\; Cos\; z = z - Log\; 2 + Log\left(\frac{e^{2z} + 1}{e^{2z}}\right)$ und wenn wir wieder $\frac{t}{\tau_{\prime}}$ für z schreiben, so haben wir:

$$s = 2\, F\,.\,\frac{t}{\tau_{\prime}} - (2\; Log\; 2)\,.\, F + 2\; F\,.\, L \text{ oder}$$

$$s = \frac{2t}{\tau_{\prime}}\,.\, F - \left(\frac{2}{M}\, log\; 2\right).\; F + \frac{2}{M}\,.\, F\,.\, l.$$

Aber es ist $2\; Log\; 2 = 1{,}3862943611$ und $\frac{2}{M} = 4{,}605170186$. Daher stimmen die in Rede stehenden Formeln vollkommen überein.

§ 60.

Am wichtigsten für die Fallversuche ist offenbar die 2te Gleichung der beiden vorigen §§, da man Mittel in Händen hat, s und t zu beobachten und dann im Stande ist, die Beobachtungen zu prüfen, wenn man k oder δ' als bekannt voraussetzt, oder k zu finden, wenn man die Beobachtungen als correct voraussetzen kann.

Nun versteht es sich von selbst, dass, wenn man das Gesetz des Widerstandes erst finden will, man die Versuche so einrichten wird, dass der Widerstand deutlich hervortritt, ich meine, dass D' im Vergleich zu D möglichst gross ist, oder dass die fallenden Körper möglichst leicht sind. Das hat zur Folge, dass, da $k = \sqrt{\frac{8}{3\,\delta'}\,.\, g\,.\,\frac{D\, r}{D'}}$ ist, k sehr klein ausfallen wird und mit k auch $\tau_{\prime}$. Dann aber ist $e^{\frac{t}{\tau'}}$ oder $e^{\frac{g}{k}\, t}$ oder N so gross, dass man einerseits $e^{-\frac{t}{\tau_{\prime}}}$ als unbedeutend vernachlässigen kann, und dass andererseits $\frac{N+1}{N}$ ohne Nachtheil $= 1$, also l oder $L = o$ gesetzt werden kann. Kurz, die Formel, nach welcher man unter der gemachten Voraussetzung wird rechnen können, lautet:

$$s = \frac{2t}{\tau_{\prime}}\, F - 2\; F\,.\, Log\; 2, \text{ oder } s = k\, t - \frac{k^2}{g}\,.\; Log\; 2.$$

Dies ist die Formel, nach welcher Newton seine Experimente berechnet hat und zugleich die Näherungsformel Poisson's, von welcher am Schlusse des § 44 die Rede war.

§ 61.

Die Versuche Newton's mit Kugeln, welche in Wasser fielen, übergehend, komme ich zu den Experimenten, welche im Jahre 1710 auf seine Veranlassung Hawksbee in der Paulskirche zu London ausführte. Derselbe liess von einer Höhe von 220 engl. Fuss immer gleichzeitig zwei Glaskugeln herunterfallen, die eine mit Quecksilber, die andere bloss mit Luft angefüllt. Solche zwei Kugeln lagen mitten auf einem hölzernen Brette, welches an dem einen Ende in eisernen Zapfen ging

und an dem andern Ende auf einem hölzernen Riegel lag. Ein eiserner Drath schob gleichzeitig den Riegel weg und liess unten in der Kirche ein Secundenpendel los. Die auf diese Weise beobachteten Fallzeiten der Kugeln, ihre Gewichte und Durchmesser giebt folgende Tabelle:

Exp.	Glaskugeln voll Quecksilber			Glaskugeln voll Luft		
	Gewichte in Gran.	Durchmesser in Zollen.	Fallzeiten in Secunden.	Gewichte in Gran.	Durchmesser in Zollen.	Fallzeiten in Secunden.
1	908	0,8	4	510	5,1	8½
2	983	0,8	4 —	642	5,2	8
3	866	0,8	4	599	5,1	8
4	747	0,75	4 +	515	5,0	8¼
5	808	0,75	4	483	5,0	8½
6	784	0,75	4 +	641	5,2	8.

Nun nimmt Newton an, dass die Fallzeiten der Quecksilberkugeln nach Galilei's Gesetz zu berechnen sind, wonach zu 220 Fuss Höhe nur eine Fallzeit von 3″ 42‴ gehört. Die Verspätung von 18‴ rühre davon her, dass das Brett nach dem Wegziehen des Riegels nicht schnell genug umschlug uud dass dadurch für den Anfang eine Verzögerung des Herabfallens entstand. Aus derselben Ursache müssten aber auch die beobachteten Fallzeiten für die mit Luft angefüllten Kugeln wenigstens um 18‴ verkürzt werden, da diese grössern Kugeln sicher auf dem umschlagenden Brette länger liegen blieben, als die kleinen aber schwerern Quecksilberkugeln. Indessen begnügt sich Newton auch für diese grössern Kugeln mit einem gleichmässigen Abzuge von 18‴ und notirt für die weitere Rechnung bezüglich folgende Fallzeiten: 8″ 12‴, 7″ 42‴, 7″ 42‴, 7″ 57‴, 8′ 12‴ und 7″ 42″.

§ 62.

Der Verlauf der Rechnungen Newton's ist folgender. Nach ihm wiegt ein englischer Kubikfuss Regenwasser 76 römische Pfund (à 12 Unzen, à 480 Gran), demnach beträgt das Gewicht einer Wasserkugel von 1 Zoll Durchmesser, in der Luft gewogen, 132,645 Gran und im luftleeren Raum 132,8 Gran, indem er die Dichtigkeit der Luft 860 mal geringer annimmt, als die des Wassers. (Ich finde aus der Gleichung: $\xi - \frac{\xi}{860} = 132{,}645$ dafür 132,7994 Gran). Da mithin eine Luftkugel mit dem Durchmesser $2r$ im luftleeren Raum $\frac{132{,}8}{860} \cdot (2r)^3 = D'$ wiegt, so ist das angegebene Gewicht der fallenden Körper immer noch erst um D' zu vermehren, um ihr Gewicht D im Vacuum zu erhalten. Hat sich Newton auf diesem Wege $F = \frac{8}{3} \cdot \frac{Dr}{D'}$ verschafft, so ist sein nächstes Bestreben $g = g' \cdot \frac{D - D'}{D}$ zu erhalten, er setzt $g' = 2.193\frac{1}{3}$ engl. Zoll. Damit hat er $\tau_{,} = \sqrt{\frac{2F}{g}}$ und $k = g\tau_{,} = \frac{2F}{\tau_{,}}$ gefunden und kann jetzt bei jedem Experiment aus der beobachteten Fallzeit t sich den Fallraum s berechnen und denselben mit der gegebenen Höhe, also diesmal

mit 220 engl. Fuss vergleichen, wobei ihm die abgekürzte Formel aus § 60: $s = \frac{2t}{\tau_{,}} F - 2F . Log\ 2 = kt - 2F . Log\ 2$ genügt. Hier sind die Resultate seiner Rechnungen in Bezug auf die mit Luft erfüllten 6 Glaskugeln:

Exp. 1.	Exp. 2.	Exp. 3.	Exp. 4.	Exp. 5.	Exp. 6.
226′ 11″	230′ 9″	227′ 10″	224′ 5″	225′ 5″	230′ 7″

Ich habe die Rechnungen nach der vollständigen Formel: $s = 2F . Log\ Cos \frac{t}{\tau_{,}}$ mit Newton's Angaben noch einmal gemacht und statt der gemessenen Höhe $s = 220$ Fuss erhalten:

Exp. 1.	Exp. 2.	Exp. 3.	Exp. 4.	Exp. 5.	Exp. 6.
226′ 8″,0896	231′ 0″,0877	227′ 7″,5808	224′ 4″,6927	225′ 4″,7321	230′ 10″,1424,

also in Beziehung auf den Raum nur geringe Abweichungen von den Resultaten Newton's.

§ 63.

Um beurtheilen zu können, ob die in § 61 mitgetheilten Versuche zur Auffindung des Widerstandscoefficienten δ' geeignet sind, habe ich einen dem § 62 entgegengesetzten Weg eingeschlagen; ich ging von der doch gewiss sorgfältig gemessenen Höhe $s = 220'$ aus und berechnete nach der so eben citirten vollständigen Formel die dazu gehörige Fallzeit, deren genaue Beobachtung schwieriger ist. Damit man meine Rechnungen leichter controliren könne, füge ich noch Rubriken für D', für $log\ 2F$, $log\ g$ und $log\ \tau_{,}$ hinzu.

Die hohlen mit Luft angefüllten Glaskugeln.

Exp.	Fallzeiten Von Newton corrigirt	Fallzeiten Von mir berechnet	$\varDelta t'''$	D'	$log . 2F$	$log . g$	$log\ \tau_{,}$
1	8″ 12‴	7″,58‴,70442	13,29558	20,531006	2,54585.94	2,57019.62	9,98782.16
2	7″ 42‴	7″22‴,09563	19,90437	21,712492	2,62724.24	2,57289.17	0,02717.54
3	7″ 42‴	7″27‴,97153	14,02847	20,531006	2,61319.17	2,57270.05	0,02024.56
4	7″ 57‴	7″48‴,47552	8,52448	19,302325	2,56711.62	2,57135.69	9,99787.97
5	8″ 12‴	8″ 1‴,18613	10,81387	19,302325	2,54029.43	2,57031.87	9,98498.78
6	7″ 42‴	7″22‴,37362	19,62638	21,712492	2,62658.76	2,57286.96	0,02685.90.

Da es sich hiebei besonders um die Rubrik $\varDelta t'''$ handelt, so habe ich dieselbe noch einmal in folgender Weise berechnet:

Durch Differentiation der Gleichung: $s = 2F . Log\ Cos \frac{t}{\tau_{,}}$ in Beziehung auf s und t erhält man successive:

$$\frac{ds}{2F} = \frac{d\,Cos \frac{t}{\tau_{,}}}{Cos \frac{t}{\tau_{,}}} = Tg \frac{t}{\tau_{,}} . \frac{dt}{\tau_{,}}, \text{ also } dt = \frac{\tau_{,}}{2F} . \frac{ds}{Tg \frac{t}{\tau_{,}}} = \frac{ds}{k . Tg \frac{t}{\tau_{,}}},$$

ein Resultat, welches wir auch ohne Weiteres aus § 44 hätten entnehmen können.

Nun ist aber die hyperbolische Arc $\frac{t}{\tau_{,}} (= z)$ bei den 6 der Rechnung unterworfenen Experimenten der Reihe nach $= 8{,}4331976,\ 7{,}2329480,\ 7{,}3492851,\ 7{,}9889087,$

8,4884042 nnd 7,2382193; sie liegt also bei allen Experimenten weit über die in § 44 mit Z bezeichnete Grenze hinaus, und wenn man daher in der voranstehenden Formel $Tg\,\frac{t}{\tau_{,}} = 1$ setzt, so begeht man höchstens einen Fehler in der 7ten Decimale. Mithin können wir für diese Experimente ganz unbedingt annehmen: $dt = \frac{ds}{k}$.

In meine weitere Rechnung gewährt folgende Tabelle einen Einblick, wobei ich $\Delta t''' - dt'''$ mit $\Delta\Delta$ bezeichnet habe:

Exp.	ds	$log\ (ds)$	$log\ k$	dt'''	$\Delta\Delta$
1	80″,0896	1,90357.61	2,55801.78.2	13,29565	— 0,00007
2	132″,0877	2,12086.24	2,60006.70.9	19,90437	+ 0,00009
3	91″,5808	1,96180.44	2,59294.61.2	14,02844	+ 0,00003
4	52″,6927	1,72175.04	2,56923.65.3	8,52443	+ 0,00005
5	64″,7351	1.81113.99	2,55530 64.8	10,81396	— 0,00009
6	130″,1424	2,11441.88	2,59972.85.9	19,62644	— 0,00006.

Obgleich die Unterschiede zwischen den von Newton angegebenen und den von mir berechneten Zeiten, welche sich ungefähr zwischen $^1/_7$ und $^1/_3$ Secunden bewegen, verschiedene Ursachen haben können, so liegt es auch nicht ausserhalb der Grenzen der Wahrscheinlichkeit, dass dieselben bloss von mangelhaften Beobachtungen der Zeit herrühren. Zu den von Newton selbst angegebenen Gründen, welche für diese Annahme sprechen und welche ich am Schlusse des § 61 angedeutet habe, füge ich noch zwei Gründe hinzu: 1) Nach den unmittelbaren Beobachtungen verfloss beim Herunterfallen der zweiten und dritten Glaskugel eine g l e i c h e Zeit von 8 Secunden, und doch ist schon ohne Rechnung klar, dass die dritte kleinere und specifisch leichtere Kugel — sie müsste 606 Gran wiegen, wenn sie dieselbe specifische Schwere hätte, wie die zweite Kugel — dazu mehr Zeit nöthig hätte, und da die Rechnung ergiebt, dass sie nahe an 6 Tertien mehr gebraucht, so ist daraus zu ersehen, dass die Beobachtungen nicht bis auf Zehntel der Secunde verlässlich sind. 2) Da die Fallzeiten an einem Pendel, welches Secunden angab, ermittelt wurden, und da Newton ausser den ganzen Secunden nur noch halbe und Viertel-Secunden angemerkt hat, so möchte daraus zu schliessen sein, dass die Beobachter sich wohl um ein Viertel einer Zeitsecunde geirrt haben können, dass sie das Aufschlagen der Glaskugeln auf den Erdboden wohl um ein Viertel der Secunde später vernahmen als es wirklich erfolgte.

Gestattet man uns also, von den Zeitangaben Newton's respective noch 13, 20, 14, 8, 11, 20 Tertien abzuziehen, so stimmen die Fallversuche Hawksbee's vollkommen mit Newton's Theorie, nach welcher der Widerstand dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional und $\delta' = \frac{1}{2}$ ist, überein. Wollte man aber diese oder ähnliche Versuche benutzen, um zu prüfen, ob es bei dem angegebenen Werthe des Widerstandscoefficienten sein Bewenden haben könne, oder ob δ' zu vergrössern oder zu verkleinern sei, so müssten hiebei die Zeitangaben bis auf einzelne Tertien zu verbürgen sein. Und da dies bei Anwendung der gewöhnlichen Mittel zur Zeitbestimmung, der Pendel und Uhren, nicht möglich ist, so ersieht man hieraus, dass selbst hohle Glaskugeln noch zu schwer sind, noch in Luft zu schnell fallen, als

dass man durch Beobachtung ihres Fallens Newton's Theorie des Widerstandes umstossen oder verbessern könnte.

Eine Bemerkung Benzenberg's pag. 121, wonach er Newton's Annahme, dass die Luft während der Versuche 860 mal leichter als Wasser gewesen sei, bei dem gewöhnlichen Barometerstande in England etwas zu gross findet, veranlasste mich, das zweite und sechste Experiment noch unter Voraussetzung eines etwas kleinern Dichtigkeitsverhältnisses zwischen Luft und Wasser, nämlich mit der Zahl 859 zu berechnen.

Für diese Hypothese ergab sich die Fallzeit beim
2ten Exp.: 7″ 22‴,30307 statt 7″ 22‴,09563, also nur ein Unterschied von 0‴,30744.
6ten Exp.: 7″ 22‴,58118 statt 7″ 22‴,37362, also nur ein Unterschied von 0‴,20756.
Uebrigens führt Benzenberg pag. 116 noch an, dass Hawksbee am 9. Juni, an welchem Tage die Versuche angestellt wurden, einen Barometerstand von 29,7 Zoll und einen Thermometerstand von 60° vorfand.

§ 64.

Ich will noch mit einigen Worten der Quecksilberkugeln gedenken, welche gleichzeitig mit den hohlen Glaskugeln herunterfielen.

Zu diesem Zwecke habe ich der Gleichung zwischen s und t folgende Form gegeben: $\frac{Ms}{2F} = log\ Cos\ \frac{t}{\tau_{,}} = log\ Cos\ z.$

Da meine Tafeln aber nicht z, sondern $z' = Mz$ angeben, so habe ich statt $t = z\tau$ genommen $t = z' . \left(\frac{\tau_{,}}{M}\right)$ und eine Rubrik für $log\ \frac{\tau_{,}}{M}$ angelegt. Um den Unterschied zwischen den verschiedenen Experimenten deutlicher hervortreten zu lassen, als es bei den unter einander fast gleichen Fallzeiten t geschehen kann, habe ich noch zwei neue Rubriken angebracht, eine für k, die grösst-möglichste Geschwindigkeit, welche die betreffenden Quecksilberkugeln überhaupt jemals erlangen können und eine für $T = 8\tau_{,}$, die Zeit, nach deren Verlauf die Geschwindigkeit nur noch unmerklich — erst in der 8ten Stelle merklich — zunimmt, natürlich unter der Voraussetzung, dass auf dem langen Wege, den die Kugeln in dieser Zeit T durchlaufen, sich weder die Schwerkraft g', noch die Dichtigkeit der Luft D' ändert.

Die mit Quecksilber angefüllten Glaskugeln.

Exp.	Berechnete Fallzeiten.	D' in Gran	$log\ 2F$	$log\ g$	$log\left(\frac{\tau_{,}}{M}\right)$	k in Zollen	T in Sec.
1	3″ 45‴,734	0,0790623	4,38921.28	2,58729.89	1,26317.26	3077,9	63,687
2	3″ 45‴,426	„	4,42367.76	2,58730.18	1,28040.36	3202,5	66,264
3	3″ 45‴,921	„	4,36864.67	2,58729.71	1,25289.05	3005,9	62,196
4	3″ 46‴,008	0,0651453	4,36050.51	2,58729.88	1,24881.88	2977,8	61,616
5	3″ 45‴,678	„	4,39459.30	2,58730.17	1,26586.13	3096,3	64,082
6	3″ 45‴,804	„	4,38149.87	2,58730.07	1,25931.47	3050,7	63,123.

Um zunächst eine Anwendung von den Zahlen in der letzten Rubrik zu geben, habe ich für das zweite Experiment berechnet, durch welchen Raum die Kugel während $T = 8\tau_{,} = 66,264$ Secunden in der Luft fallen würde. Unsere obige

Formel geht dabei in folgende über: $s = \frac{2F}{M} . \log Cos\, 8$ und darnach ist $s = 16152$ engl. Fuss. Während derselben Zeit würde die Kugel im Vacuum durch einen Raum von 70743 engl. F., also durch einen 4,3798 mal grössern Raum gefallen sein.

Wichtiger für uns ist es, aus der vorstehenden Tabelle zu ersehen, dass selbst das Fallen von kleinen Quecksilberkugeln durch die Luft bei der unbedeutenden Höhe von 220 engl. F. nicht vollständig nach Galilei's Gesetz zu berechnen ist; und da im Vacuum zu dieser Höhe, streng genommen, eine Fallzeit von 3″41‴,717442 gehört, so hat die Luft z. B. die erste Kugel bei ihrem Fallen doch um 4,01612 Tertien aufgehalten. Es kommen also von jener Verspätung von 18 Tertien auf Rechnung des nicht schnell genug umschlagenden Brettes nur 14 Tertien. Indessen kann man aus den oben (§ 61) angegebenen Gründen für die hohlen Glaskugeln, auf die es doch allein ankommt, immerhin jenen unverkürzten Abzug von 18 Tertien bestehen lassen.

§ 65.

Da, wie erwähnt, selbst hohle Glaskugeln noch zu schwer sind, als dass man durch mit ihnen in der Luft angestellte Versuche den Widerstandscoefficienten δ' bestimmen könnte, so unternahm, gleichfalls durch Newton veranlasst, Desaguliers im Jahre 1719 den 27. Juli eine Reihe von Versuchen mit fünf Schweinsblasen, denen man dadurch, dass man sie innerhalb einer auseinanderzunehmenden hohlen hölzernen Kugel gehörig mit Luft anfüllte, eine kugelförmige Gestalt gegeben hatte. Aus einer Höhe von 272 engl. F. liess man innerhalb der Paulskirche eine dieser Blasen immer gleichzeitig mit einer als Signal dienenden Bleikugel dadurch herunterfallen, dass man die Fäden, an welchen die Kugeln hingen, — die Bleikugel über einer Rolle — an ihrem Vereinigungspunkte durchschnitt. Man hatte sich so eingerichtet, dass man die Fallzeiten bis auf Viertel der Secunde beobachten konnte, und zwar geschah dies sowohl oben im Thurm, als auch unten auf dem Fussboden, jedoch mit dem Unterschiede, dass man oben die ganzen Fallzeiten der Blasen notirte, während man unten nur aufzeichnete, um wie viel Secunden die Schweinsblase später den Boden erreichte, als die Bleikugel. Um aus den letztern Angaben die vollständigen Fallzeiten der Blasen ableiten zu können, hatte man natürlich noch die Anzahl von Secunden zu addiren, welche die Bleikugel zum Herunterfallen gebrauchte; man setzte dafür 4¼ Secunden an. Nach Benzenberg's Bericht (pag. 118) wurde angenommen, dass der Schall in ¼ Secunden den vorliegenden Weg von 272 F. durchlief. Da mit jeder einzelnen Schweinsblase der Versuch zweimal gemacht wurde, so erhielt man für die Fallzeit einer jeden 4 Beobachtungen, deren mit Kritik genommenen Mittel die folgende Tabelle angiebt. Das wenigste Vertrauen verdient der Versuch mit der 5ten Blase, von der Newton berichtet: Vesica quinta rugosa erat et per rugas suas nonnihil retardabatur. Die von mir hinzugefügte sechste Reihe unter dem Strich bezieht sich auf die mitfallende Bleikugel, von der Newton nur noch anführt, dass sie ungefähr zwei römische Pfunde gewogen habe; bei Bestimmung ihres Durchmessers nahm ich das specifische Gewicht des Blei's zu 11,4 an und rechnete hier nicht mit Newton's $\delta' = \frac{1}{2}$, sondern mit einem Mittelwerth $\delta' = 0{,}51235$, von welchem in § 67 die Rede sein wird.

Exp.	Gewicht in Gran	Durchmesser in Zollen	Fallzeiten in Secunden	Fallräume nach Newton's Theorie	Unterschied zwischen Theor. u. Exp.
1	128	5,28	19	271′ 11″	— 0′ 1″
2	156	5,19	17	272′ ½″	+ 0′ ½″
3	137½	5,3	18½	272′ 7″	+ 0′ 7″
4	97½	5,26	22	277′ 4″	+ 5′ 4″
5	99⅛	5	21⅛	282′ 0″	+ 10′ 0″
6	11520 „circiter“	1,9676	4½ „circiter“	284′,8	+ 12′,8

§ 66.

Obgleich auch die vorstehenden Versuche bei dem heutigen Standpunkt der Wissenschaft noch manches zu wünschen übrig lassen, so werden bei dem hier so deutlichen Hervortreten des Widerstandes kleine Beobachtungsfehler nur von geringem Einflusse sein und wir können mit Hoffnung auf Erfolg die Versuche mit den Blasen benutzen, um den Widerstandscoefficienten δ' durch Beobachtungen zu ermitteln. Konnten wir nun schon bei der Berechnung der mit den hohlen Glaskugeln angestellten Experimente uns mit der in § 44 aufgestellten Näherungsformel begnügen, so wird dies hier um so mehr gestattet sein. Wir haben also aus den vorstehenden Versuchen durch die Gleichung: $s = kt - \frac{k^2}{g}\, Log\ 2$ das in k involvirte δ' zu berechnen.

Dies kann durch die Formel: $k = \frac{g\,t}{2\,Log\ 2} \pm \sqrt{\left(\frac{g\,t}{2\,Log\ 2}\right)^2 - \frac{g\,s}{Log\ 2}}$ geschehen, oder besser durch Einführung eines Hilfswinkels φ.

Bringt man nämlich die quadratische Gleichung auf die Form: $k^2 + p\,k + q = o$, wo $p = -\frac{g\,t}{Log\ 2}$ und $q = \frac{g\,s}{Log\ 2}$ ist, so erhält man: $k = -p\,.\,cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2$ oder $k = -p.sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2$, wobei $sin\ \varphi = \pm\frac{2\sqrt{q}}{p}$ ist. Da aber auch unser $k^2 = \frac{8}{3\,\delta'}\,g\,\frac{D\,r}{D'}$ und Newton's $F = \frac{8}{3}\,\frac{D\,r}{D'}$ ist, so hat man $\delta' = \frac{g\,F}{k^2}$.

Ehe ich die Resultate meiner Rechnungen vorlege, habe ich noch über die zwei verschiedenen positiven Auflösungen zu sprechen, welche die quadratische Gleichung zulässt. Obgleich sie natürlich beide der aufzulösenden Gleichung genügen, so können wir doch nur einen Werth und zwar den jedesmaligen kleinern Werth gebrauchen. Der Grund davon ist folgender: Eigentlich haben wir es doch mit der Auflösung der in Beziehung auf k transcendenten Gleichung: $s = \frac{k^2}{g}\, Log\ Cos\,\frac{g}{k}\,t$ zu thun, in welcher $Cos\,\frac{g}{k}\,t = \frac{e^{\frac{g}{k}t} + e^{-\frac{g}{k}t}}{2}$ ist; nun sind aber die andern Werthe für k stets so gross, dass man den Ausdruck $e^{-\frac{g}{k}t}$ durchaus nicht vernachlässigen kann, und auf dieser Vernachlässigung beruht ja unsere Näherungsformel. Mit

andern Worten: Wäre das k so gross, als es der jedesmalige grössere Werth angiebt, so würde die quadratische Gleichung selbst, aus der er hervorgegangen, die Basis ihrer Existenz verloren haben, man müsste in solchen Fällen, wo k gross, der Widerstand also unbedeutend ist, dieses k aus der vollständigen Gleichung, wenn nicht anders, durch Probiren ableiten, wozu sich später Gelegenheit zeigen wird. Zum Belege meiner Auseinandersetzung und zugleich zur leichtern Controle meiner Rechnungen werde ich bei der in § 68 befindlichen Zusammenstellung den falschen k, die ich mit k' bezeichnen will, eine besondere Rubrik einräumen. Zu dieser vielleicht etwas zu ausführlichen Erörterung wegen der zweiten Auflösungen sehe ich speciell mich veranlasst, weil man mich sonst mit Bezugnahme auf meine Schriften über die Deutung sämmtlicher Wurzeln in den Gleichungen der Inconsequenz zeihen könnte. Auch bemerke ich noch, dass, da p negativ ist, man gut daran thut, in dem Ausdruck für $\sin\varphi$ den Zähler negativ anzunehmen, um nicht unnöthiger Weise bei Bestimmung des Hilfswinkels aus dem ersten Quadranten herauszukommen. Die zur Auffindung von k nothwendigen und hinreichenden Ausdrücke sind also:

$$\text{I)}\ k = \frac{g\,t}{2\,Log\,2} - \sqrt{\left(\frac{g\,t}{2\,Log\,2}\right)^2 - \frac{g\,s}{Log\,2}}, \text{ oder, was dasselbe ist,}$$

$$\text{II)}\ k = -p \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2, \text{ wobei } \sin\varphi = \frac{-2\sqrt{q}}{p}.$$

§ 67.

Nach der Gleichung I) des vorigen § habe ich etwa vor drei Jahren die in § 65 angeführten Experimente berechnet und bin dabei von der Annahme ausgegangen, dass $\frac{g'}{2} = 16{,}13$ engl. Fuss sei, was 193,56 engl. Zolle wären. Obgleich ich heute nicht mehr die Quelle dieser von Newton etwas abweichenden Annahme angeben kann, so erlaube ich mir doch, die Resultate meiner damaligen Rechnungen kurz anzugeben.

Exp.	D'	D	$\frac{g}{2}$	$log\ F$	$log\ k$	δ'
1	22,73	150,73	164,371	1,66918	2,24352	0,50002
2	21,587	177,587	170,031	1,75532	2,29367.5	0,50063
3	22,991	160,491	165,834	1,69311	2,55551	0,50441
4	22,473	119,973	157,30	1,57335	2,17794	0,51908
5	19,302	118,427	162,011	1,61175	2,19594	0,53759
6	1,1764	11521,2	193,54	4,40982	3,39240	1,6324.

Legt man jedem der fünf Experimente, von denen über dem Striche die nöthigen Mittheilungen gegeben sind, einen gleichen Stimmwerth bei, so wäre demnach der Widerstandscoefficient $\delta' = 0{,}51235$, welche Zahl mit der aus Euler's Widerstandsexponenten hervorgegangenen Zahl $\delta' = 0{,}51252$ fast zusammenfällt.

Da die Bleikugel, von welcher unter dem Strich die Rede ist, beim Fallen durch die Luft nur einen unbedeutenden Widerstand erleidet, also in Betreff ihrer ein sehr grosser Werth für k zu erwarten war, so durfte ich mir, um aus den auf sie bezüglichen Angaben δ' zu berechnen, nicht gestatten $Cos\,\frac{g}{k}\,t = \frac{1}{2}\,e^{\frac{g}{k}t}$ zu

setzen, sondern ich musste aus der vollständigen Gleichung $s = \frac{k^2}{g} . Cos \frac{g}{k} t$ den Werth von k ableiten. Dass aber dieser Versuch mit der Bleikugel überhaupt nicht geeignet ist, einen auch nur einigermassen zuverlässigen Werth von δ' zu geben, liegt am Tage, da hier eben der Widerstand zu unbedeutend ist, um ungeachtet des zwiefach von Newton gebrauchten Wortes „circiter" auf eine verlässliche Weise hervortreten zu können; meine hierauf bezügliche Rechnung, welche das unwahrscheinliche Resultat $\delta' = 1{,}6324$ ergeben hat, bestätigt dies. Ich habe daher lieber den so eben angegebenen Mittelwerth $\delta' = 0{,}51235$ benutzt, um zu sehen, wie damit die auf die Bleikugel bezüglichen Beobachtungen stimmen. Dass für die beobachtete Fallzeit $t = 4^1/_4''$ sich als entsprechender Fallraum $s = 284{,}8$ engl. F. ergiebt, ist schon berichtet. Ich theile daher nur noch mit, dass für den gemessenen Fallraum $s = 272$ engl. F. sich als zugehörige Fallzeit $t = 4'',1516$ durch Benutzung meiner Tafeln ermittelt hat. Der Unterschied von $^1/_{10}$ Secunde in Zeit liegt aber gänzlich innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler.

Anmerkung. Bei derselben Hypothese, dass $\frac{g'}{2} = 16',13$ und dass ausserdem $\delta' = ^1/_2$ ist, habe ich für das 5te Experiment den Fallraum berechnet, je nachdem für das Dichtigkeitsverhältniss zwischen Wasser und Luft 860 oder 859 anzunehmen ist und gefunden im ersten Fall: $s = 281'\ 10'',6486$, im andern Fall: $s = 281'\ 8'',6964$, also nur einen Unterschied von 1,9522 Zoll.

§ 68.

Um mit Newton's Angaben in Uebereinstimmung zu bleiben, schien es mir am sichersten, die Rechnungen in Beziehung auf die fünf Blasen mit $\frac{g'}{2} = 193^1/_3$ engl. Zollen noch einmal zu machen. Ich that dies mit Benutzung der Gleichungen II) des § 66 und erhielt folgende Resultate:

Exp.	log . g	T	log k	log k'	δ'	Δ
1	2,51635	4'',2660	2,24353	3,94575	0,49942	0,00060
2	2,53104	4'',6318	2,29368	3,91028	0,50003	0,00060
3	2,52019	4'',3658	2,25553	3,93759	0,50378	0,00063
4	2,49726	3'',9052	2,17793	3,99223	0,51850	0,00058
5	2,51007	4'',0220	2,19592	3,98706	0,53701	0,00058.

Die Rubrik T giebt uns zu erkennen, nach wie wenigen Secunden die Blasen ohne merkliche Beschleunigung in der Luft weiter fielen, dass sie sämmtlich nach Ablauf von ungefähr 4 Secunden sich fast mit gleichförmiger Geschwindigkeit weiter abwärts bewegten.

Die letzte Rubrik Δ giebt die Unterschiede zwischen den im vorigen § durch die Annahme $\frac{g'}{2} = 193{,}56$ engl. Z. erhaltenen δ' und den so eben gefundenen δ', bei deren Berechnung ich von Newton's Annahme $\frac{g'}{2} = 193^1/_3$ engl. Z. ausging.

Nimmt man endlich von allen in diesem § mitgetheilten δ' das arithmetische Mittel, unbekümmert um das von Newton selbst gegen das fünfte Experiment aus-

gesprochene Misstrauen, so ergiebt sich aus den Versuchen mit den fünf Blasen der Widerstandscoefficient

$$\delta' = 0{,}51175,$$

ein Resultat, welches so wenig von dem aus Newton's Theorie hervorgegangenen $\delta' = \frac{1}{2}$ abweicht, dass ich den Wunsch nicht unterdrücken kann, es möchte diese Theorie, namentlich dem oben citirten gewichtvollen Worte Poisson's gegenüber, nochmals sorgfältig geprüft werden. Eine vollständige Uebereinstimmung zwischen der aufgestellten Theorie und den Experimenten hat Newton selbst nicht erwartet; im Gegentheil hoffte er, dass aus den Abweichungen sich die andern bisher nicht berücksichtigten Ursachen des Widerstandes der Medien einst würden bestimmen lassen, indem er sagt Propos. 40: Haec est resistentia quae oritur ab inertia materiae fluidi. Ea vero quae oritur ab elasticitate, tenacitate et frictione partium ejus, sic investigabitur... Patent haec

$$(s = \frac{2t}{\tau_{,}} F - 2 \, Log \, 2 \, . \, F + 2 \, F \, . \, L) \ldots$$

ex hypothesi quod globus nullam aliam patiatur resistentiam nisi quae oritur ab inertia materiae. Si vero aliam insuper resistentiam patiatur, descensus erit tardior, et ex retardatione innotescet quantitas hujus resistentiae.

Ich bemerke noch, dass das von mir aus Newton's Pendelversuchen abgeleitete und in § 42 mitgetheilte $\delta' = 0{,}77482$ sich zu dem aus seinen Fallversuchen abgeleitete $\delta' = 0{,}51175$ verhält wie 4 : 2,642 und führe in Bezug hierauf folgende Worte Newton's an: Resistentiae igitur per experimenta pendulorum majores prodiere (ob causas jam descriptas) quam per experimenta globorum cadentium, idque in ratione 4 ad 3 circiter. Das von mir aus einigen Pendelbeobachtungen Bessel's abgeleitete Resultat $\delta' = 0{,}67778$ würde für das Verhältniss 4 : 3 sehr gut passen, da es 3,02 statt 3 ergiebt. Zu den Gründen, welche Newton an dem citirten Orte wegen des aus Pendelbeobachtungen sich ergebenden grössern Widerstandes anführt, möchte ich noch den hinzufügen, dass die Pendel sich fortwährend in einer Luftschicht von wirklich constanter Dichtigkeit bewegen, während aus nicht unbeträchtlicher Höhe herabfallende Körper doch, streng genommen, aus specifisch leichtern Luftschichten nur schliesslich in eine Luftschicht kommen, welche derjenigen an Dichtigkeit gleich ist, in welcher die Pendel fortwährend sich befinden.

§ 69.

Die doppelte Rechnung, zu der ich mich wegen der verschiedenen Annahmen über die Schwerkraft g' veranlasst fühlte, brachte mich darauf, einen Ausdruck für die Aenderung des δ' aufzustellen in Beziehung auf kleine Aenderengen in der Schwere. Ich ging dabei zunächst von der Näherungsformel: $s = kt - \frac{k^2}{g} \, Log \, 2$ aus, die ja für die Berechnung der Experimente mit den Blasen vollständig ausreichte. Weil nach § 66 $k = \sqrt{\frac{gF}{\delta'}}$ und $\frac{k^2}{g} = \frac{F}{\delta'}$ ist, so hatte ich die Gleichung:

$$s \sqrt{\delta'} = t \sqrt{F} \, . \sqrt{g} - \frac{F \, Log \, 2}{\sqrt{\delta'}}$$

in Bezug auf δ' und g zu differenziiren und erhielt:

I) $d\,\delta' = \frac{\delta' \sqrt{2\,\delta'} \; t \, \tau_{,} \, d\,g}{2\,s\,\delta' - 2\,F \, Log \, 2}$, wo der Kürze wegen für $\sqrt{\frac{2F}{g}}$ Newton's $\tau_{,}$ gesetzt ist.

Da es aber auch wünschenswerth schien, einen Ausdruck dieser Aenderungen

für solche Fälle zu besitzen, wo die Näherungsformel nicht ausreicht, so habe ich die vollständige Gleichung: $s = \frac{k^2}{g} . Log . Cos \frac{g}{k} t$ in Beziehung auf δ' und g gleichfalls differenziirt. Weil $\frac{k^2}{g} = \frac{F}{\delta'}$ und $\frac{g}{k} = \sqrt{\frac{g\,\delta'}{F}}$ ist, so geht die Gleichung zunächst in folgende über:

$s . \frac{\delta'}{F} = Log\ Cos \left(t . \sqrt{g} . \sqrt{\frac{\delta'}{F}}\right)$; daraus erhält man, wenn man der Kürze wegen $\frac{\delta'}{F} = \mu^2$ und $\sqrt{g} = \varrho$ setzt:

$$s\ \mu^2 = Log\ Cos\ t\ \mu\ \varrho.$$

Das Differential dieser Gleichung in Bezug auf μ und ϱ ist:

$2\ s\ \mu\ d\ \mu = \frac{d\ Cos}{Cos} = \frac{Sin}{Cos} . d\ (t\ \mu\ \varrho) = t\ (Tg)\ (\mu\ d\ \varrho + \varrho\ d\ \mu)$, woraus sich ergiebt:

$$d\ \mu = \frac{t\ \mu\ Tg\ (t\ \mu\ \varrho)\ d\ \varrho}{2 . s\ \mu - t . \varrho . Tg\ (t\ \mu\ \varrho)} \text{ oder}$$

$$d\ \delta' = \frac{t\ \mu^2\ F . (Tg) . d\ g}{2 . s\ \mu \sqrt{g} - t . g . (Tg)} = \frac{t . \delta' . (Tg) . d\ g}{2 . s . \frac{\sqrt{2\ \delta'}}{\tau_{,}} - t . g . (Tg)} = \frac{t\ \tau_{,}\ \delta'\ (Tg)\ d\ g}{2 . s\ \sqrt{2\ \delta'} - t . g . \tau_{,}\ (Tg)}$$

Da nun $\frac{g}{k} = \sqrt{2\ \delta'} \sqrt{\frac{g}{2\ F}} = \frac{\sqrt{2\ \delta'}}{\tau_{,}}$, also $g\ \tau_{,} = k \sqrt{2\ \delta'}$ (und nicht etwa blos = Newton's k aus § 58) ist, so haben wir:

$$\text{II)}\ d\ \delta' = \frac{t\ \delta'\ \tau_{,}\ (Tg)\ d\ g}{\sqrt{2\ \delta'}\,[2 . s - t\ k\ (Tg)]} = \frac{t \sqrt{\frac{\delta'}{2}}\ \tau_{,}\ Tg \left(\frac{g}{k}\ t\right) d\ g}{2 . s - t . k . Tg \left(\frac{g}{k}\ t\right)},$$

wo $\tau_{,} = \sqrt{\frac{2\ F}{g}}$, $F = \frac{4}{3} \frac{D\ r}{D'}$, $g = g' . \frac{D - D'}{D}$ und $k = \sqrt{\frac{g\ F}{\delta'}}$ ist.

Nimmt man nun wieder k sehr klein, also den Wiederstand sehr gross an, so darf man in dem letzten Ausdruck $Tg\ \frac{g}{k}\ t = 1$ setzen, und weil mit dieser Annahme zugleich erlaubt ist, sich der Näherungsformel $s = k\ t - \frac{F}{\delta'} Log\ 2$ zu bedienen, so geht damit der allgemeine Ausdruck II), wie sich's gebührt, in den speciellen Ausdruck I) über.

Die sich hieran knüpfenden Rechnungen in Bezug auf die fünf Blasen ergaben folgende Resultate:

Exp.	Δ	$d\ \delta'$	$\Delta\Delta$	$d\ g$ in Zollen
1	0,00060	0,00060.1	0,00000.1	0,38
2	0,00060	0,00061.8	0,00001.8	0,40
3	0,00063	0,00063.3	0,00000.4	0,40
4	0,00058	0,00061.2	0,00003.2	0,36
5	0,00058	0,00063.4	0,00005.4	0,37

wo $\Delta\Delta = d\ \delta' - \Delta$ die Abweichung zwischen dem Unterschiede der durch unmittelbare Berechnung der δ' bei etwas verschiedenen g' und dem Unterschiede, wie ihn die Differentialformel für δ' ergab, bezeichnet.

§ 70.

Da im weitern Verlauf des vorigen Jahrhunderts, gestützt auf neue und vielfach wiederholte Versuche mit abgeschossenen Kugeln, die Meinung namentlich bei Praktikern immer mehr sich zu befestigen anfing, dass Newton's Gesetz, wonach der Widerstand dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist, nur für mittlere Geschwindigkeiten annähernd richtig sei, dass hingegen der Widerstand bei kleinen und grossen Geschwindigkeiten sich bedeutend grösser herausstelle, als ihn Newton's Theorie ergiebt, — indem bei kleinen Geschwindigkeiten die Zähigkeit der flüssigen Theilchen mehr hervortrete, bei grossen Geschwindigkeiten die zu verdrängende Flüssigkeit nicht schnell genug ausweichen und die nachfolgende Flüssigkeit nicht schnell genug den hinter der Kugel entstehenden leeren Raum ausfüllen könne —, da ferner Newton sein Gesetz nur durch das Fallen von Kugeln, welche nie viel schwerer als das widerstehende Medium waren, bestätigt hatte, so entschloss sich im Anfange des gegenwärtigen Jahrhunderts Benzenberg zu einer neuen Reihe von Fallversuchen, welche er im St. Michaelsthurm zu Hamburg mit Bleikugeln und mit Benutzung von Tertienuhren bei sehr verschiedener Fallhöhe anstellte. Wir wollen dieselben einer Prüfung unterwerfen.

Das specifische Gewicht der Bleikugeln, die eine Beimischung von $^1/_{10}$ Zinn hatten, betrug $D = 10{,}9$ und die Dichtigkeit der Luft wurde in Folge von Barometerbeobachtungen ein für alle Mal auf $D' = \frac{1}{800}$ des Wassers gesetzt, so dass $\frac{D}{D'} = 8720$ angenommen wurde. Der Durchmesser der bei den Versuchen benutzten Kugeln wird zu 1,46 par. Zoll angesetzt, das würde den Radius $r_{,} = 0{,}060833..$ par. Fuss geben, die Rechnungen wurden aber mit $r = 0{,}061$ par. Fuss gemacht. Die Schwere im Vacuum wird für Hamburg $g' = 2.15{,}1013$ par. F. angenommen, darnach ist $g = g' \,.\left(1 - \frac{D'}{D}\right) = g' \,.\, 0{,}999885.3211.$ Den Bruch $1 - \frac{D'}{D}$ bezeichnet Benzenberg mit p, ich will ihn, wie bei Euler, G nennen. Die Tertienuhr wurde mit der linken Hand in demselben Moment angedrückt, in welchem die rechte Hand den Faden durchschnitt, an dem die Kugel hing. Durch Vergleichung mit einem daneben befindlichen Pendel vor und nach den Beobachtungen ergab sich als constanter Fehler der Tertienuhr eine Zeit von 9 Tertien. Das Loslassen des Fingers am Sperrhaken erfolgte wohl ein Paar Tertien später, als der Schall in's Ohr kam, der Unterschied wird als Fehler des Sinnes bezeichnet und mit 3,67 Tertien in Anrechnung gebracht, so dass von der jedesmal wirklich beobachteten Fallzeit in Summa 12,7 Tertien abgezogen wurden und nur der Rest als beobachtete Fallzeit t den weiteren Rechnungen zum Grunde gelegt wurde. Die Geschwindigkeit des Schalles wird zu 1038 par. F. für die Secunde angenommen. Die Fehler in der Zeitbestimmung bei den einzelnen Beobachtungen konnten sich, wie Benzenberg sagt, für gewöhnliche Fälle bis auf 3 Tertien ausdehnen, indess hofft er, da er meistens nur Mittel aus wenigstens 60 Beobachtungen als wirkliche Beobachtungen anführt, dass die Ungewissheit im Resultat nicht auf $^1/_{10}$ Tertie gehen werde. Obgleich Benzenberg den Barometer- und Thermometerstand angeführt hat, so geschah es doch nur, wie er sagt (pag. 187), weil es einmal so Sitte sei; bei den Rechnungen sei weiter keine Rücksicht darauf genommen. Die Versuche wurden im Jahr 1802 in der Zeit vom 8. Mai bis zum 20. September angestellt und fielen folgendermassen aus:

Stadium.			Fallhöhe in par. F.	Fallzeit berechnet für's Leere.	Fallzeit beobachtet in der Luft.	Unterschied in Tertien.
ϑ	*A*	1	24,8	1″16‴,89	1″17‴,08	0,19
η	*B*	2	67,7	2″ 7‴,04	2″ 8‴,77	1,73
ζ	*C*	3	144,0	3″ 5‴,28	3″ 6‴,95	1,67
ε	*D*	4	234,4	3″56‴,39	4″ 1‴,05	4,66
δ	*E*	5	240,0	3″59‴,20	4″ 3‴,70	4,50
γ	*F*	6	321,0	4″36‴,63	4″48‴,30	11,67
β	*G*	7	340,0	4″44‴,70	5″ 0‴,00	15,30
α	*H*					

§ 71.

Aus der von mir hinzugefügten letzten Rubrik, welche die Unterschiede zwischen der beobachteten Fallzeit in der Luft und der für's Vacuum nach Galilei's Gesetz berechneten Fallzeit angiebt, wird man ersehen, dass die beobachteten Fallzeiten nicht auf unser volles Vertrauen Anspruch machen können. Solches Zurückspringen von 1‴,73 auf 1‴,67 oder gar von 4‴,66 auf 4‴,50 kann in der Wirklichkeit nicht vorkommen. Auch ohne von einem bestimmten Widerstandsgesetz aus zugehen, begreift man, dass der Widerstand des Mittels eben eine Verzögerung der nach Galilei's Gesetz berechneten Fallzeit zur Folge haben muss. Wenn also der Körper im Vacuum t Sekunden $=$ 1″16‴,89 gebraucht, um die erste Station, 24,8 Fuss, von *A* bis *B* zu durchlaufen, so braucht er, um denselben Weg im lufterfüllten Raum zurückzulegen, $t + \varphi$ Secunden. Wenn dann ferner die Kugel im leeren Raum, um von *B* bis *C* zu gelangen, um neue 42,9 Fuss herunterzufallen, $t_{,}$ Sekunden $=$ 50‴,15 nöthig hat, so wird sie auf diesen Weg in der Luft $t_{,} + \varphi_{,}$ Secunden verwenden. Die Verzögerung der Fallzeit in der Luft für einen Raum, der dem ganzen zweiten Stadium, der gleich 67,6 Fuss ist, beträgt $\varphi + \varphi'$. Ebenso, wenn für den nun folgenden Weg von *C* bis *D*, welcher 76,3 Fuss repräsentirt, nach Galilei $t_{,,}$ Secunden $=$ 68‴,24 erforderlich sind, so wird die Kugel in der Luft denselben Weg erst in $t_{,,} + \varphi_{,,}$ Secunden zurücklegen können, und die ganze Verzögerung beim Fallen in der Luft für eine Strecke, die dem dritten Stadium von 144 Fuss gleich kommt, muss $\varphi + \varphi_{,} + \varphi_{,,}$ betragen, u. s. f. Je grösser also die Fallhöhen sind, desto grösser müssen — unter übrigens gleichen Umständen — die durch die Luft hervorgebrachten Verzögerungen sein. Ich darf wohl nicht fürchten, dass man gegen das vorstehende Räsonnement den Einwand erheben wird, dass Benzenberg die Stadien nicht von der Spitze des Thurmes *A* abwärts nach *H* hin genommen hat, sondern im Allgemeinen, mit alleiniger Ausnahme des vierten Stadiums, von unten, von α aufwärts nach ϑ hin, so dass bei ihm $\alpha\beta = 24{,}8$, $\alpha\gamma = 67{,}7$ u. s. w. ist. Dieser Umstand, der wegen der verschiedenen Dichtigkeit der Luft in *A* und *H* an und für sich nicht ganz aus der Acht zu lassen ist, würde hier, wo es sich um einen fallenden Körper handelt, der 8720mal schwerer als Luft ist, wohl zu übersehen sein. Wenn also meine eben ausgesprochene Behauptung, dass grössere Fallhöhen auch grössere Verzögerungen nach sich ziehen, richtig ist, so erkennt man von vorne herein, bevor man sich noch in irgend eine Berechnung einlässt, dass die beobachteten Fallzeiten, trotz aller von Benzenberg auf deren Erforschung verwendeten Mühe, wenigstens eine Unsicherheit von

$^2/_{10}$ Tertien zulassen, während er behauptet, dass „die Ungewissheit im Resultat nicht auf $^1/_{10}$ Tertie gehe.“ Damit habe ich zugleich sagen wollen, dass auf das für das erste Stadium durch Beobachtung gewonnene Resultat gar kein Gewicht zu legen ist, da ein Unterschied von 0,19 Tertien, wie er sich zwischen der idealen Fallzeit für's Vacuum und der wirklich beobachteten Fallzeit für die Luft herausgestellt hat, viel zu gering ist, um mit Sicherheit wahrgenommen zu werden. Und dieser Unterschied kommt doch eigentlich allein in Betracht, weshalb auch Newton, wie wir gesehen haben, immer zwei Kugeln zugleich fallen liess, von denen die eine nur als Signal dienen sollte. Füge ich nun noch hinzu, dass die für die beiden letzten Stadien gewonnenen Resultate Benzenberg selbst nicht völlig befriedigten, weil schon auf dem 6. Stadium das Aufschlagen der Kugeln auf die unten in *H* hingelegten Bretter oben in der Gegend von *B* kaum zu hören war und weil deshalb für das 7. Stadium das Aufspringen der Bretter, was eine neue völlig unbekannte Grösse in die Rechnung hineinbrachte, als Merkzeichen genommen werden musste, so bleibt es vorläufig noch ganz in Frage gestellt, ob von der mühsamen Arbeit Benzenberg's irgend ein neuer Aufschluss für die Lösung des vorliegenden Problems zu erwarten ist. Eigentlich beabsichtigte Benzenberg auch gar nicht, einen neuen positiven Aufschluss hierüber zu geben, er wollte, wie er pag. 187 sagt, durch seine Versuche weniger aufbauen, als die Giltigkeit des Newton'schen Widerstandsgesetzes für grosse Fallhöhen niederreissen; darum störte es ihn z. B. nicht, dass er von manchen seiner Kugeln nicht unmittelbar das specifische Gewicht untersucht hatte, dass ihre Durchmesser zwischen 1,48 und 1,7 engl. Zollen variirten und dass diese Kugeln durch mehrmaliges Fallen oft schon sehr an ihrer Kugelgestalt gelitten hatten. Ich bin aber doch der Meinung, dass eine in Ansehn stehende Hypothese, wie die Newton's über den Widerstand, nur durch sehr correcte Versuche modificirt werden kann. Nichts desto weniger wollen wir Benzenberg's Versuche einer sorgfältigen Berechnung unterbreiten, zuvor aber die von ihm selbst mitgetheilte Berechnung kennen lernen.

§ 72.

Da Benzenberg der Ansicht ist, „dass es vortheilhaft sei, wenn derjenige, welcher die Versuche macht, um 15 Meilen von dem, der sie berechnet, entfernt ist“, so veranlasste er zur Berechnung seiner Versuche Brandes, welcher sie nach folgender Formel (pag. 194) vollzog:

$$t = \frac{\chi}{2g' \sqrt{G}} \; Log \; \frac{1 + \sqrt{1 - e^{\frac{-2g's}{\chi^2}}}}{1 - \sqrt{1 - e^{\frac{-2g's}{\chi^2}}}}.$$

Ich habe wohl nur von der Bedeutung des Buchstabens χ zu sprechen. Brandes schreibt dafür k und versteht darunter den Exponenten des Widerstandes, erklärt denselbigen aber nicht wie Euler, sondern als „diejenige Geschwindigkeit, bei welcher die Kraft des Widerstandes $=1$, der natürlichen Schwere, der absoluten Kraft, mit der die Schwere die Körper im Vacuo niedertreibt, ist.“ Während wir also auf der einen Seite χ von Newton's F und Euler's h zu unterscheiden haben, müssen wir diesen Buchstaben auch von dem, was wir mit k bezeichnet haben, auseinanderhalten, da wir unter k die grösste Geschwindigkeit verstehen, welche der

Körper bei seinem relativen Gewichte B (§ 58, pag. 52) im widerstehenden Medium wirklich erlangt. Um uns aber keine Uebereilung wegen des Zusammenhangs von χ und k zu Schulden kommen zu lassen, wollen wir Brandes weiter hören. Er sagt: „Der Exponent des Widerstandes hängt bekanntlich von der Gestalt des fallenden Körpers und von dem Verhältniss seiner specifischen Schwere zu der der Luft $\left(\frac{m}{n}, \text{ wofür ich } \frac{D}{D'} \text{ schreibe}\right)$ ab; hier, wo nur von Kugeln die Rede ist, wird $\chi = \frac{\sqrt{32} \,.\, Dr \frac{g'}{2}}{3\, D'}$." Dann nimmt er, wie schon mitgetheilt, $r = 0{,}061$, $\frac{g'}{2} = 15{,}1013$ par. F. und $\frac{D}{D'} = 8720$ an und findet, „indem er alle diese Zahlen als genau annimmt," $\chi = 292{,}7148$ par. Fuss. Ich aber finde, wenn ich mit denselben Zahlen rechne, $\chi = 15146$ par. F. Bei einigem Nachdenken und aus Gründen, die später (§ 74) einleuchten werden, erkannte ich indess, dass die Ursache meines Abweichens von Brandes lediglich an einem oder zwei Druckfehlern liegt; Brandes nämlich hat in seinem Briefe an Benzenberg vom 10. Januar 1803 gewiss geschrieben:

$$\chi^2 = \frac{32 \,.\, D \,.\, r\, \frac{g'}{2}}{3\, D'} \text{ oder vielmehr er hat gemeint: } \chi = \sqrt{\frac{32 \,.\, D \,.\, r\, \frac{g'}{2}}{3\, D'}}.$$

Nun ist aber nach unserer Auffassung (§ 42) $k^2 = \frac{8}{3\,\delta'} \frac{D\,r}{D'}\, g = \frac{16}{3\,\delta'} \frac{D\,r}{D'} \frac{g}{2}$ und wenn wir mit Newton $\delta' = \frac{1}{2}$ setzen, $k^2 = \frac{32}{3} \,.\, \frac{D\,.\,r}{D'} \,.\, \frac{g}{2}$. Halten wir jetzt die Ausdrücke für k^2 und χ^2 zusammen, so erkennen wir, da $g = g' \,.\, G$ ist, dass $G \,.\, \chi^2 = k^2$, also $\chi = \frac{k}{\sqrt{G}}$ ist und dass Brandes mit Newton $\delta' = \frac{1}{2}$ angenommen hat.

Die Resultate von Brandes' Rechnungen nach der obigen sehr unlogarithmischen Formel für t und ihre Vergleichung mit Benzenbergs Beobachtungen giebt folgende Tabelle:

Stadium.	Fallzeiten von Benzenberg beobachtet.	Fallzeiten von Brandes berechnet für $\delta' = \frac{1}{2}$	Unterschied in Tertien.
1	1″17‴ 08	1″17‴,01	0,07
2	2″ 8‴,77	2″ 7‴,55	1,22
3	3″ 6‴,95	3″ 6‴,86	0,09
4	4″ 1‴,05	3″59‴,67	1,38
5	4″ 3‴,70	4″ 2‴,59	1,11
6	4″48‴,30	4″41‴,89	6,41
7	5″ 0‴,0	4″50‴,50	9,50
7	wofür ich finde:	4″50‴,43	9,57

§ 73.

Es muss uns nun vor Allem daran liegen, einen Massstab zu gewinnen, nach dem wir beurtheilen können, welches Gewicht wir den einzelnen Beobachtungen beizulegen berechtigt sind. Zu dem Zwecke wird es gut sein, aus den beiden vorigen Tabellen eine neue Zusammenstellung zu machen, wobei die aus Galilei's Gesetz gefolgerten Fallzeiten mit G, die von Brandes nach Newton's Theorie berechneten

mit N und endlich die von Benzenberg beobachten Fallzeiten mit B bezeichnet werden mögen: daraus ergiebt sich von selbst, was unter $N - G$, $B - N$, $B - G$ und unter $\frac{N-G}{B-N} = Q$ zu verstehen ist.

Versuch	Fallhöhe	$(N-G)'''$	$(B-N)'''$	$(B-G)'''$	$\frac{N-G}{B-N} = Q$
1	24,8	0,12	0,07	0,19	1,7
2	67,7	0,51	1,22	1,73	0,4
3	144,0	1,58	0,09	1,67	17,6
4	234,4	3,28	1,38	4,66	2,4
5	240,0	3,39	1,11	4,50	3,1
6	321,0	5,26	6,41	11,67	0,8
7	340,0	5,73	9,57	15,30	0,6

Wäre die Hypothese, nach welcher der Widerstand dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional und $\delta' = \frac{1}{2}$ ist, durch nichts anzufechten, so müssten vollkommene Beobachtungen den Unterschied der Fallzeiten für's Vacuum und für die Luft, auf den es hier allein ankommt, so geben, wie die Rubrik $N - G$ es vorschreibt und die Zahlen der nächsten Columnen $B - N$ wären Beobachtungsfehler. Dann wäre auf den zweiten, sechsten und siebenten Versuch fast gar kein Gewicht zu legen, weil die Fehler hier grösser sind, als die durch die Uhren zu messenden Quantitäten, und auch der erste Versuch könnte nur einen geringen Anspruch auf Berücksichtigung machen, weil der Beobachtungsfehler mehr als die Hälfte der in Betracht kommenden Zeitgrösse betrüge; es blieben zur weitern Berücksichtigung eigentlich nur der 3te, 4te und 5te Versuch übrig, deren Ansprüche auf Berücksichtigung nach den in der Rubrik Q enthaltenen Zahlen 17.6, 2.4, 3.1 zu bemessen wären. Obgleich nun Benzenberg zu den schon mitgetheilten Andeutungen, weshalb einige Versuche weniger Ansprüche auf Berücksichtigung erheben können als andere, noch hinzufügt, dass auf dem zweiten Stadium die Tertienuhr nicht wie sonst eine hölzerne Unterlage, sondern eine steinerne, die Temperatur der Uhr erniedrigende Unterlage hatte, dass schon der sechste Standpunkt in der Kuppel der Kirche lag, in welcher durch den dort herrschenden Luftzug das Fallen der Kugeln verzögert werden konnte, dass auf dem siebenten, höchsten Beobachtungsort von vier Versuchen immer drei vollständig misslangen, weshalb das für dieses Stadium angegebene Resultat nur das Mittel von 10 Einzelbeobachtungen ist*), so meint er doch, dass alle diese und andere Umstände zwar kleine Abweichungen erklären könnten, aber nicht so bedeutende, wie sie namentlich für's 6te und 7te Stadium hervortreten, und dass diese grossen Abweichungen nur durch die Annahme, dass die grössern Fallhöhen allmälig die Newton'sche Hypothese alteriren, hinlänglich erklärt werden können. Ich kann mich aber dieser Meinung Benzenbergs nicht anschliessen; denn wenn wirklich die Beobachtungsfehler gegen die Fehlerhaftigkeit des Newton'schen Widerstandsgesetzes nur unbedeutend wären, wenn also die in der Columne $B - N$ enthaltenen Zahlen vorzugsweise in dieser Fehlerhaftigkeit des Gesetzes ihren Ursprung hätten, so müssten diese Zahlen nach Benzenberg selbst mit den Fallhöhen in eine angemessene

*) Die rohen, noch nicht wegen der Zeitgleichung und anderer Ursachen reducirten 10 Einzelbeobachtungen schwanken zwischen 5″ 13‴ und 5″ 30‴.

Beziehung zu bringen sein, was aber keineswegs der Fall ist. Demnach werden wir mit Berücksichtigung aller Umstände zu der Annahme hingedrängt, dass die in der Rubrik $B - N$ aufgestellten Zeitunterschiede vorzugsweise Beobachtungsfehlern zuzuschreiben sind, und dass nur ein unbedeutender Theil dieser Zahlen der nicht vollkommen richtigen Newton'schen Hypothese zur Last zu legen ist. Damit haben wir den gesuchten Massstab für die weitere Benutzung der sieben Resultate, welche Benzenberg aus der grossen Menge seiner Versuche gezogen hat, gefunden; er ist in der letzten Rubrik $\frac{N-G}{B-N} = Q$ enthalten, wonach wir z. B. verpflichtet sind, auf den dritten Versuch einen 44 mal grösseren Werth zu legen als auf den zweiten Versuch.

§ 74.

Bevor ich weiter gehe, scheint es angemessen, in Kürze den Zusammenhang zwischen der in § 72 mitgetheilten Formel, nach welcher Brandes die Versuche Benzenberg's berechnet hat, und der von mir in § 44 aufgestellten entsprechenden Formel anzugeben.

Es war nach Brandes $t = \frac{\chi}{2\,g'\sqrt{G}}\, Log \frac{1+\sqrt{1-e^{\frac{-2g's}{\chi^2}}}}{1-\sqrt{1-e^{\frac{-2g's}{\chi^2}}}}$.

Wenn es nun einerseits erlaubt ist $\chi = \frac{k}{\sqrt{G}}$ und $\chi^2 = \frac{k^2}{G}$ zu setzen, und wenn wir andererseits der Abkürzung wegen $e^{\frac{gs}{k^2}} = \Sigma$ und $e^{\frac{-2gs}{k^2}} = \frac{1}{\Sigma^2}$ schreiben, so geht der Ausdruck in folgenden über:

$$t = \frac{k}{2g}\, Log \frac{\Sigma + \sqrt{\Sigma^2 - 1}}{\Sigma - \sqrt{\Sigma^2 - 1}} = \frac{k}{g}\, Log\,(\Sigma + \sqrt{\Sigma^2 - 1}).$$

Aber aus unsrer Formel $s = \frac{k^2}{g}\, Log\, Cos\, \frac{g}{k}\, t$ können wir für t denselben Werth ableiten. Setzt man nämlich noch $e^{\frac{gt}{k}} = \xi$, so geht die Formel, da $2\, Cos\, \frac{gt}{k} = \xi + \frac{1}{\xi}$ ist, in folgende über: $\xi + \frac{1}{\xi} = 2\,\Sigma$, welche $\xi = \Sigma + \sqrt{\Sigma^2 - 1}$ oder $t = \frac{k}{g}\, Log\,(\Sigma + \sqrt{\Sigma^2 - 1})$ giebt. Der andere Werth, den man aus der quadratischen Gleichung erhält, bezieht sich auf das Reciproke von ξ, wonach $\frac{1}{\xi} = \Sigma - \sqrt{\Sigma^2 - 1}$ ist. — In dieser Uebereinstimmung liegt zugleich eine Bestätigung dafür, dass wir die Bedeutung von χ in § 72 richtig ermittelt haben.

§ 75.

Da die von Brandes berechneten Zeiten (§ 72) die Annahme $\delta' = \frac{1}{2}$ voraussetzen, so müssten diese Zeiten, wenn sie vollkommen richtig wären, umgekehrt $\delta' = \frac{1}{2}$ ergeben; man erhält aber mit Benutzung der vollständigen Formel $s = \frac{k^2}{g}\,.\, Log\, Cos\, \frac{g}{k}\, t$ für die aufeinander folgenden sieben Stadien nachstehende Werthe für $log\, k^2$ und für δ':

Stadium	1	2	3	4	5	6	7
$\log k^2$	4,91972	4,93509	4,93310	4,93266	4,93334	4,93281	4,92786
δ'	0,51534	0,49742	0,49970	0,50021	0,49943	0,50003	0,50576

wobei ich noch ausdrücklich bemerke, dass hier, wo der Widerstand unbedeutend, k also sehr gross ist, die Auffindung nicht aus der schon oft erwähnten Näherungsformel und dem daraus in § 66 abgeleiteten Ausdrucke für k erfolgen konnte.

Aus den theilweise nicht unbedeutenden Abweichungen dieser Werthe für δ' von dem hiebei als Normalwerth geltenden $\delta' = \frac{1}{2}$ geht hervor, dass entweder Brandes die Fallzeiten nicht richtig berechnet hat, — man sehe § 72, 7tes Stadium — oder dass er sie nicht genau genug, nicht auf eine hinreichende Anzahl von Decimalstellen berechnet hat.

Weil es mir nun — wozu die Nothwendigkeit aus § 73 erhellt — darum zu thun war, genaue Angaben der Fallzeiten sowohl für's Vacuum, als für die widerstehende Luft zu besitzen, so entschloss ich mich, bevor ich an die eigentliche Aufgabe, δ' aus Benzenberg's Beobachtungen zu finden, ging, die Fallzeiten mit aller nur möglichen Sorgfalt unter der auch von Brandes gemachten Voraussetzung, dass $\delta' = \frac{1}{2}$ ist, nochmals zu berechnen und stelle Brandes Resultate und die meinigen im Folgenden neben einander:

Stadium	Nach Brandes:			Nach meiner Rechnung:		
	Für's Vacuum $= G$	Für Newton's $\delta' = \frac{1}{2}$	$\Delta t''' = N - G$	Für's Vacuum $= G$	Für Newton's $\delta' = \frac{1}{2}$	$\Delta t''' = N - G$
1	1″ 16‴,89	1″ 17‴,01	0,12	1″16‴,890018	1″17‴,00646	0,10644
2	2″ 7,04	2″ 7,55	0,51	2″ 7,039404	2″ 7,55256	0,51316
3	3″ 5,28	3″ 6,86	1,58	3″ 5,278638	3″ 6,86070	1,58206
4	3″ 56,39	3″ 59,67	3,28	3″ 56,386608	3″59,66856	3,28195
5	3″ 59,20	4″ 2,59	3,39	3″ 59,193660	4″ 2,59400	3,40034
6	4″ 36,63	4″ 41,89*)	5,26	4″ 36,628308	4″41,88952	5,26121
7	4″ 44,70	4″ 50,50	5,80	4″ 44,697426	4″50,43342	5,73599

Dass ich bei meiner Berechnung der Fallzeiten genöthigt war, meine Zuflucht zu Gudermann's siebenstelligen Tafeln zu nehmen, darf ich wohl nicht noch besonders hervorheben, vielleicht aber, dass ich mich dabei nicht seiner bequemeren zweiten Tafel, welche nur für hyperbolische Aren über 2 eingerichtet ist, bedienen konnte, sondern seine erste Tafel benutzen musste, welche auf der Verwandlung von hyperbolischen Aren (z) in entsprechende cyklische Aren (ω) beruht.

Um eine etwaige Revision meiner Rechnungen zu erleichtern, theile ich für die einzelnen Versuche noch die Hilfsgrössen ω und die dazu gehörigen $z = \frac{g}{k} t$ mit; die unter der Ueberschrift $\Delta t'''$ befindlichen Zahlen geben den Unterschied zwischen den von Brandes und von mir berechneten Fallzeiten in Tertien an. Ein für allemal ist hiebei $\log g = 1,47999.45$ und $\log k^2 = 4,93283.95$, also $k = 292,6980.07$ (für $\delta' = \frac{1}{2}$).

*) In der von Benzenberg besorgten neuen Ausgabe seiner Schrift vom Jahre 1845 steht pag. 34 ohne nähere Motivirung 4″ 43,46 Tertien statt 4″ 41‴,89.

Für Stadium	ω	z	$d\,t'''$
1	7° 33′ 53″,941	0,1324191.7	+ 0,00354
2	12° 28′ 3″,140	0,2193373.9	— 0,00256
3	18° 6′ 5″,642	0,3213227.2	— 0,00070
4	22° 58′ 18″,958	0,4121303.8	+ 0,00144
5	23° 14′ 13″,314	0,4171608.2	— 0,00400
6	26° 44′ 43″,265	0,4847328.3	+ 0,00048
7	27° 29′ 40″,483	0,4994248.1	+ 0,06658

§ 76.

Obgleich wir nicht erwarten, dass gleiche Fehler in der Zeitbestimmung sich auf den verschiedenen Stadien von gleichem Einflusse zeigen sollen, so dürfte es dennoch befremden, dass z. B. der für's erste Stadium hervorgetretene kleine Unterschied von 0,00354 Tertien δ' um 0,01534 ändert, während der für das 7te Stadium angegebene bedeutende Zeitunterschied von 0,06658 Tertien δ' nur um 0,00576 vergrössert. Daher wollen wir zur grösseren Aufklärung dieser Erscheinung das Differential von δ' in Bezug auf t aufstellen.

Mit Bezugnahme auf § 69 überzeugt man sich, dass die Fundamentalgleichung auf folgende Form gebracht werden kann:

$$\frac{s}{F}\,\delta' = Log\ Cos\ (t\,.\,\sqrt{\tfrac{g}{F}}\,\sqrt{\delta'}).$$

Setzt man δ', welches $= \frac{g\,F}{k^2}$ ist, $= u^2$, so folgt

$$\frac{2\,s}{F}\,u\,d\,u = (Tg)\,\sqrt{\tfrac{g}{F}}\,(u\,d\,t + t\,d\,u),\ \text{ferner}$$

$$d\,u = \frac{\sqrt{\frac{g}{F}}\,u\,.\,(Tg)\,.\,d\,t}{\frac{2\,.\,s}{F}\,u - \sqrt{\frac{g}{F}}\,(Tg)\,.\,t} = \frac{F\,.\,\frac{g}{k}\,.\,(Tg)\,.\,d\,t}{2\,.\,s\,.\,u - \sqrt{F\,g}\,(Tg)\,.\,t},$$

$$\frac{d\,\delta'}{2\,u} = \frac{F\,.\,\frac{g}{k}\,(Tg)\,.\,d\,t}{2\,.\,s\,.\,u - k\,.\,u\,.\,t\,(Tg)} = \frac{k\,\delta'\,.\,(Tg)\,.\,d\,t}{2\,.\,s\,.\,u - k\,.\,u\,.\,t\,.\,(Tg)},\ \text{endlich}$$

$$d\,\delta' = \frac{k\,\delta'\,.\,Tg\,\frac{g}{k}\,t\,.\,d\,t}{s - \frac{1}{2}\,k\,t\,.\,Tg\,\frac{g}{k}\,t}.$$

Die nach dieser Differentialformel geführten Rechnungen ergaben folgende Resultate:

Stad.	$d\,t'''$	$log\ Tg\,\frac{g}{k}\,t$	$d\,\delta'$	$\Delta\,\delta'$	$\Delta\Delta$
1	0,00354	9,11942 13	0,01576.2	0,01534	0,00042.2
2	— 0,00256	9,33422.54	— 0,00252.7	— 0,00258	0,00005.3
3	— 0,00070	9,49234.67	— 0,00022.2	— 0,00030	0,00007.8
4	0,00144	9,59138.14	0,00022.0	0,00021	0,00001.0
5	— 0,00400	9,59608.65	— 0,00050.6	— 0,00057	0,00006.4
6	0,00048	9,65323.76	0,00004.6	0,00003	0,00001.6
7	0,06658	9,66432.66	0,00578.9	0,00576	0,00002.9

wo $\Delta\, \delta'$ die sich aus § 75 ergebenden Abweichungen der δ' von dem Normalwerth, wie sie aus der unmittelbaren Benutzung der von Brandes und mir berechneten Zeiten hervorgegangen sind, bedeuten und wo $\Delta\Delta$ die Differenz zwischen diesen durch unmittelbare Berechnung erhaltenen Unterschieden der δ' und den durch die Differentialformal gewonnenen Unterschieden angiebt.

Anmerkung. Das in § 69. II. angegebene Differentialverhältniss zwischen $d\,\delta'$ und $d\,g$ lässt sich dem so eben erhaltenen Verhältniss zwischen $d\,\delta'$ und $d\,t$ entsprechender also darstellen:

$$d\,\delta' = \frac{t}{2g} \cdot \frac{k\,\delta' . Tg \frac{g}{k} t}{s - \frac{1}{2}\,k\,t . Tg \frac{g}{k} t} . d\,g.$$

Wenn $d\,\delta'$ in beiden Differentialquotienten $\frac{d\,\delta'}{d\,t}$ und $\frac{d\,\delta'}{d\,g}$ dasselbe wäre, so würde durch Elimination desselben folgen, dass $2g . dt = t . dg$ sei. Dagegen erhält man unmittelbar aus der Fundamentalgleichung: $s = \frac{k^2}{g} . Log\ Cos \frac{g}{k} t$, oder $\frac{s\,\delta'}{F} = Log\ Cos \left(\sqrt{\frac{\delta'}{F}} . \sqrt{g} . t \right)$, durch Differentiation in Bezug auf t und g, wenn man wieder $\sqrt{g}$ mit ϱ bezeichnet: $o = (Tg) . \sqrt{\frac{\delta'}{F}}\ (\varrho\, d\,t + t\,d\,\varrho)$, was $2\,g\,d\,t = -\,t\,d\,g$ giebt, ein Resultat, welches auch der für's Vacuum geltenden Formel $s = \frac{g'}{2}\,t^2$ entspricht und natürlich allein richtig ist.

§ 77.

Dadurch, dass wir in § 75 die Fallzeiten genauer berechnet haben, als Brandes, sind wir in den Stand gesetzt, den in § 73 niedergelegten Massstab, wonach die Güte der Beobachtungen Benzenberg's zu beurtheilen ist, bedeutend zu verbessern. Es ist nun:

Für Stadium	$\Delta\, t'''$ $N - G$	$B - N$	$Q = \frac{N - G}{B - N}$
1	0,106	0,074	1,432
2	0,513	1,217	0,422
3	1,582	0,089	17,775
4	3,282	1,381	2,377
5	3,400	1,106	3,074
6	5,261	6,410	0,821
7	5,736	9,567	0,600.

§ 78.

Jetzt ist es an der Zeit, den Widerstandscoefficienten δ' aus Benzenbergs Beobachtungen zu berechnen. Da für dieselben k sehr gross ist, so kann die Berechnung nicht nach den in § 66 befindlichen, aus Newton's Näherungsformel abgeleiteten Ausdrücken vollzogen werden. Wir müssen uns an die vollständige Formel: $s = \frac{k^2}{g}\ Log\ Cos \frac{g}{k} t = \frac{k^2}{g}\ Log\ Cos\ z$ wenden. Weil aber, wenn k sehr gross, also z sehr klein ist, wir mit Vortheil uns werden der Reihenentwicklung für $Log\ Cos\ z$ bedienen

können, welche uns mehr oder weniger genäherte Werthe für k und δ' verschaffen wird, so sind wir wenigstens nicht von vorne herein auf das lästige Probiren angewiesen.

Es ist nämlich nach Gudermann § 45 oder nach meiner „Auflösung der kubischen Gleichungen" § 42:

$$Log\ Cos\ z = \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{12} + \frac{z^6}{45} - \frac{17\,z^8}{2520} + \dots$$

Benutzen wir von dieser Reihenentwicklung, bei welcher $z = \frac{g}{k}\,t$ ist, nur die beiden ersten Glieder, so erhalten wir als ersten Näherungswerth

$$\text{I)}\ k^2 = \frac{g^3\,t^4}{12 \cdot \left(\frac{g}{2}\,t^2 - s\right)}.$$

Nehmen wir noch das dritte Glied der Reihe hinzu, so haben wir $k^2 = K$ aus folgender quadratischen Gleichung zu bestimmen:

$$K^2 + p\,K + q = o, \text{ wo } p = -\frac{g^3 \cdot t^4}{12 \cdot \left(\frac{g}{2}\,t^2 - s\right)},\ q = +\frac{g^5\,t^6}{45\left(\frac{g}{2}\,t^2 - s\right)} \text{ ist.}$$

Nun ist, wie in § 66 (vergl. Aufl. der kub. Gl. § 32, I):

$$K = -p \cdot cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2, \text{ oder } K = -p \cdot sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2, \text{ wobei } sin\,\varphi = \pm\frac{2\sqrt{q}}{p}.$$

Doch hat man aus ähnlichen Gründen, wie die in § 66 aufgestellten, hier nur zu nehmen:

$$\text{II)}\ K = k^2 = -p \cdot cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2, \text{ und } sin\,\varphi = -\frac{2\sqrt{q}}{p},$$

wodurch ein zweiter Näherungswerth für δ' erlangt wird.

Geht man noch einen Schritt weiter und benutzt die ganze oben hingestellte Reihe für *Log Cos z*, so gelangt man zu folgender kubischen Gleichung:

$$\alpha\,K^3 + 3\,\beta \cdot K^2 + 3\,\gamma\,K + \delta = o,$$

$$\text{wo } \alpha = \frac{g\,t^2}{2} - s,\ \beta = -\frac{g^3\,t^4}{36},\ \gamma = \frac{g^5\,t^6}{135},\ \delta = -\frac{17\,g^7 \cdot t^8}{2520} \text{ ist.}$$

Nach meinen „kubischen Gleichungen" § 24 sind die Bedingungen für den irreducibeln Fall folgende zwei:

$$(\alpha\,\gamma - \beta^2)\,(\beta\,\delta - \gamma^2) > (\alpha\,\delta - \beta\,\gamma)^2 \text{ und } \beta^2 > \alpha\,\gamma.$$

Da dieselben für die nachfolgenden Zahlenbeispiele nicht b e i d e zutreffen, so hat man es hier stets mit dem r e d u c i b e l n Falle zu thun, für welchen ich in meinen „kub. Gl." § 26, D folgende Auflösung durch hyperbolische Functionen gegeben habe:

$$\left.\begin{aligned} \text{III)}\ K = k^2 = -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{2\sqrt{\beta^2 - \alpha\,\gamma}}{\alpha} \cdot Cos\left(\frac{\varphi}{3}\right), \\ \text{wobei } Cos\,\varphi = \frac{-\frac{\alpha}{2}\,(\alpha\,\delta - \beta\,\gamma) - \beta \cdot (\beta^2 - \alpha\,\gamma)}{\sqrt{\beta^2 - (\alpha\,\gamma)^3}}. \end{aligned}\right\}$$

Dieser dritte Näherungswerth für k^2 kommt der Wahrheit immer schon sehr nahe, so dass man höchstens noch zwei Versuche nach der vollständigen Formel: $s = \frac{k^2}{g} \cdot Log\ Cos\,\frac{g}{k}\,t$ zu machen hat, um den Werth von k^2 mit aller Schärfe zu erlangen.

Dass $\delta' = \frac{g\,F}{k^2}$ und $F = \frac{s}{s}\,\frac{D\,r}{D'}$ ist, darf wohl kaum mehr in Erinnerung gebracht werden.

§ 79.

Auf dem im vorigen § angegebenen Wege habe ich aus Benzenberg's Beobachtungen den Widerstandscoefficienten δ' berechnet und zwar, wie die folgende Tabelle ausweist, einmal unter der Voraussetzung, dass der Kugelradius $r = 0{,}061$ par. F. ist und dann für $r_, = 0{,}060833$ par. F. (vergl. § 70):

Stad.	Fallhöhe $= s$	Beobachtete Fallzeit $= t$	$log\ k^2$	Für $r = 0{,}061$ ist $\delta' =$	Für $r_, = 0{,}060833$ ist $\delta' =$
1	24′,8	1″ 17‴,08	4,71399.5	0,82759	0,82534
2	67′,7	2″ 8‴,77	4,40174.5	1,69846	1,6939
3	144′,0	3″ 6‴,95	4,90891.5	0,52831	0,52688
4	234′,4	4″ 1‴,05	4,78045.4	0,71016	0,70822
5	240′,0	4″ 3‴,70	4,81067.0	0,66243	0,66062
6	321′,0	4″ 48‴,30	4,58864.5	1,10450	1,1015
7	340′,0	5″ 0‴,0	4,50949.5	1,32534	1,3217
			Arithmetisches Mittel:	0,97954	0,97688.

Das einfache arithmetische Mittel aus den voranstehenden sieben Versuchen, $\delta' = 0{,}97954$ oder $\delta' = 0{,}97688$, weicht zu sehr von dem Resultate ab, welches wir aus den unter günstigeren Verhältnissen angestellten Versuchen Desaguliers' abgeleitet haben, als dass wir darauf ein besonderes Gewicht legen könnten. Daher habe ich die einzelnen δ', welche ich für Benzenberg's Angabe $r = 0{,}061$ berechnet habe, mit den bezüglichen Zahlen Q aus § 73, welche ein Mass der Ansprüche auf Berücksichtigung für die einzelnen Beobachtungen ausdrücken, multiplicirt und erhalte dann als Mittelwerth aus sämmtlichen Beobachtungen $\delta' = 16{,}821264 : 26{,}6 = 0{,}63238$. Legt man aber an Benzenberg's Beobachtungen den in § 77 verbesserten Massstab der Berücksichtigung an, so ist das Resultat folgendes:

$$\delta' = 16{,}71892 : 26{,}501 = 0{,}63088.$$

§ 80.

So wären wir denn zu einem ziemlich befriedigenden Resultat gelangt, freilich nicht aus Benzenberg's Beobachtungen allein, sondern mit Hilfe des Newtonschen Gesetzes, nach welchem wir die Güte jener Beobachtungen bemassen. Da wir es uns aber zur Aufgabe gemacht haben, den Widerstandscoefficienten bloss aus Versuchen zu bestimmen, so bleibt uns aus den in § 71 und § 73 angegebenen Gründen nichts andres übrig, als den 1, 2, 6 und 7ten Versuch Benzenberg's gänzlich zu ignoriren; nehmen wir dann von den Zahlen, welche sich aus dem 3, 4 und 5ten Versuch ergaben, das arithmetische Mittel, so erhalten wir:

$$\begin{cases} \delta' = 0{,}63363 \text{ für } r = 0{,}061, \text{ und} \\ \delta' = 0{,}63191 \text{ für } r_, = 0{,}060833. \end{cases}$$

Lassen wir auch noch den vierten Versuch, weil er von der Kuppel der Kirche aus angestellt ist, als unzuverlässig weg, so würde das Mittel aus dem 3ten und 5ten Versuch für beide Radien $\delta' = 0{,}59456$ sein.

Dieses Resultat, so wie das aus Desaguliers' Versuchen gezogene Resultat würde dann aber nur aus Experimenten hervorgegangen sein, welche sich auf

mittlere Fallhöhen beziehen, es bliebe daher nach der Meinung Benzenberg's und Anderer immer noch die Frage, wie gross der Widerstandscoefficient für kleine und grosse Fallhöhen sei, zu beantworten. In der ersten Hinsicht verweise ich auf Newton's Versuche mit in Wasser fallenden Kugeln, welche der Annahme $\delta' = \frac{1}{2}$ ziemlich gut entsprechen, und in letzter Hinsicht wollen wir zum Schlusse noch des Herrn Prof. Dr. F. Reich's Fallversuche, in dem Dreibrüderschachte bei Freiberg, im August und September 1831 angestellt, zum Gegenstande einer kurzen Besprechung machen.

§ 81.

Die Fallhöhe war bei Herrn Reich ungefähr 158½ Meter (= 488 par. F. = 520 engl. F.), seine Kugeln waren nicht immer von schwerem Blei, sondern öfter von Zinn mit etwas Wismuth vermischt und von noch leichterm Elfenbein. Um den Moment des Herunterfallens der Kugeln genau angeben zu können, wurden sie meistens mit einer Zange festgehalten, bei deren Oeffnen sie herabfielen, oder um ganz massive Kugeln ohne irgend einen störenden Faden anwenden zu können, legte man sie auch wohl erwärmt auf einen metallenen Ring, durch welchen sie, nachdem sie wieder gehörig erkaltet waren, durchfielen. Die bei den Versuchen angewandten grossen Zinnkugeln hatten im Mittel einen Durchmesser von $2r = 40{,}38$ Millimeter, ihr absolutes Gewicht war im Mittel $B = 270{,}45$ Gramme und ihr specifisches Gewicht $D = 7{,}878$; bei den kleinen Zinnkugeln war $2r = 35{,}59$ Millimeter, $B = 190{,}00$ Gramme, $D = 8{,}028$. Bei einer grössern Elfenbeinkugel war $2r = 36{,}64$ Millimeter, $B = 46{,}24$ Gramme, $D = 1{,}790$, bei den zwei kleinern Elfenbeinkugeln war $2r = 28{,}56$ Millimeter, $B = 22{,}322$ und $D = 1{,}811$. Von den angewandten Bleikugeln sagt Herr Reich nur, dass ihr absolutes Gewicht $B = 270{,}27$ Gramme und ihr specifisches Gewicht $D = 10{,}603$ betrug. Um mir den Durchmesser der Bleikugeln selbst zu verschaffen, legte ich den Normalwerth des absoluten Gewichts von einem Kubikcentimeter Wasser w, nämlich 1 Gramma, zum Grunde, obgleich jener nur für den Zustand des Wassers gilt, bei welchem es seine grösste Dichtigkeit erlangt hat; ich glaubte mich zu dieser Annahme um so mehr berechtigt, da sich bei den vier andern Versuchen mit Kugeln von Zinn und Elfenbein aus den von H. Reich angegebenen drei Zahlen B, D und r der Werth von w bald unter, bald über 1 Gramm ergab, nämlich successive 0,9987682; 1,002683; 0,9867507; 1,010512. Bei der Annahme also, dass $w = 1$ ist, fand ich für die Bleikugeln $2r = 36.51378$ Millimeter, also $r = 0{,}0561947$ par. F. Der Moment, in welchem die Kugeln unten im Schacht anlangten, wurde dadurch bestimmt, dass man daselbst einen um eine Axe beweglichen eisernen Rahmen anbrachte, auf welchen man dünne Bretter legte und an dessen einem Ende sich ein Metallspiegel mit einer vorgestellten Argand'schen Lampe befand; so wie eine Kugel auf eines der Bretter aufschlug, verschwand dem obern Beobachter das Bild der Lampe im Spiegel. Der Fehler der angewandten Tertienuhr mochte innerhalb der bei den Versuchen in Betracht kommenden 6 bis 7 Secunden „kaum in einzelnen Fällen" 2 Tertien betragen. Als constanter Fehler der Sinne werden 8,76 Tertien angemerkt. Der Fallraum in der ersten Secunde für den leeren Raum ist bei der hier in Betracht kommenden Breite von 50° 33′ 22″,81 nach H. Reich $\frac{g'}{2} = 4904{,}93$ Millimeter. Da nun der mittlere Barometerstand bei diesen Versuchen $h' = 317{,}58$ par. Linien, der mittlere Thermometer-

stand $t' = 13^0{,}2$ C. und die Spannung der Wasserdämpfe $d' = 0{,}934 \times 11{,}555 = 10{,}79$ par. Linien betrug, so fand H. Reich nach der Formel

$$D' = 0{,}001299 \cdot \frac{1}{336} \cdot \frac{800}{800 + 3t'} \left(h' - \frac{3}{8} d'\right)$$

die Dichtigkeit der Luft $D' = 0{,}0011550$.

Hiernach ist das jedesmalige relative Beschleunigungsmass der Schwerkraft $\frac{g}{2} = \frac{D - D'}{D} \cdot \frac{g'}{2}$ zu berechnen. Für die Bleikugeln, deren Dichtigkeit auf $D = 10{,}603$ angesetzt ist, findet H. Reich

$$\frac{g}{2} = 4{,}90459 \text{ Meter, ich } \frac{g}{2} = 4{,}904396 \text{ Meter.}$$

§ 82.

Ueber die weitern Rechnungen giebt folgende Tabelle Aufschluss, in welcher die erste Horizontalreihe sich auf die mit den grossen Zinnkugeln veranstalteten vier Versuchsreihen, die zweite auf die zwei Versuchsreihen mit den kleinen Zinnkugeln, die dritte auf die fünf Versuchsreihen mit den Bleikugeln, die vierte auf sechs Beobachtungen mit der grossen Elfenbeinkugel, die fünfte auf eilf mit den kleinen Elfenbeinkugeln gemachten Beobachtungen bezieht:

Vers.	Fallzeit $= t$	Wahrsch. Fehler	Fallhöhe $= s$	$log\ g$	$log\ F$	$log\ k^2$	δ'
1	357''',78	0''',72	158''',4041	0,99159.91	2,56450.86	3,72670.86	0,67514.81
2	361,11	0,51	158,4084	0,99160.03	2,51829.21	3,64914.96	0,72568.10
3	355,86	0,53	158,3894	0,99161.55	2,65024.23	3,77849.57	0,73006.59
4	407,91	0,89	158,4276	0,99138.26	1,87916.52	3,13554.56	0,54325.31
5	421,10	0,61	158,4279	0,99138.57	1,77603.34	3,05795.08	0,51223.39

Die Berechnung von $log\ k^2$ aus der Gleichung $s = \frac{k^2}{g} \cdot Log\ Cos\ \frac{g}{k}\ t$ ist hier meistens durch Probiren geschehen, da einerseits Elfenbein nicht leicht genug ist, dass man nach den in § 66 aufgestellten Formeln rechnen könnte, und andererseits Zinn nicht schwer genug ist, dass man sich mit Vortheil der Formeln in § 78 bedienen könnte. Als arithmetisches Mittel aus H. Reich's Beobachtungen ergiebt sich

$$\delta' = 0{,}63727.64,$$

ein sehr günstiges Resultat.

Anmerkung. Die Unterschiede zwischen den beobachteten Fallzeiten und den für's Vacuum berechneten sind resp. 16''',81; 20''',13; 14''',89; 66''',91 und 80''',12.

§ 83.

Wie man sieht, hat H. Reich neben den Fallzeiten noch die denselben anhaftenden wahrscheinlichen Fehler angegeben, wir können also durch die in § 76 enthaltene Differentialformel $d\,\delta' = \frac{k \cdot \delta'\ Tg\ \frac{g}{k} t . dt}{P}$, wo $P = s - \frac{1}{2}\ k\ t\ Tg\ \frac{g}{k} t$ ist, den Grad der Genauigkeit der berechneten δ' in Beziehung auf die beobachtete Zeit prüfen. Da nun die mitgetheilten Fallhöhen auch nicht absolut richtig sein werden, so schien es mir nöthig, den Einfluss eines kleinen Fehlers in der Bestimmung der Fallhöhe auf δ' gleichfalls zu untersuchen.

Von der Gleichung $s = \frac{k^2}{g} . Log\, Cos \frac{g}{k}\, t$ ausgehend, setze man $\frac{g}{k^2} = \lambda$ und $t \sqrt{g} = \zeta$, so erhält man aus der Gleichung $\lambda\, s = Log\, Cos\, (\zeta . \sqrt{\lambda})$ durch Differentiation

$$d\lambda = \frac{\lambda\, d\, s}{\frac{1}{2} t . \sqrt{\frac{g}{\lambda}}\, Tg\, (\zeta . \sqrt{\lambda}) - s},$$ und weil $\delta' = \frac{g . F}{k^2} = \lambda . F$ ist,

$$d\, \delta' = \frac{\delta' . d\, s}{\frac{1}{2} t\, k . Tg \frac{g}{k}\, t - s} = \frac{\delta' . d\, s}{- P}.$$

Man hüte sich einen Ausdruck für $\frac{d\, \delta'}{d\, s}$ etwa dadurch ableiten zu wollen, dass man in dem obigen Ausdruck für $\frac{d\, \delta'}{d\, t}$ statt $d\, t$ den von § 63 her bekannten Werth $\frac{d\, s}{k . Tg \frac{g}{k} t}$ substituirt, man würde dadurch das falsche Resultat $d\, \delta' = \frac{\delta' . d\, s}{P}$ erhalten. (Vergl. die Anm. zu § 76.)

Da nun einerseits H. Reich die wahrscheinlichen Fehler bei den Fallräumen nicht angiebt, und da ich andererseits zu wissen wünschte, was bei diesen Versuchen auf die Bestimmung von δ' nachtheiliger eingewirkt habe, ein kleiner Fehler in der Zeitbestimmung oder ein kleiner Fehler in der Raumbestimmung, so nahm ich im Folgenden die Beobachtungsfehler in Beziehung auf den Raum ($d\, s$) so an, dass sie zu den Fallhöhen (s) in demselben Verhältniss standen, wie der jedesmalige wahrscheinliche Fehler bei der Zeitbestimmung ($d\, t$) sich zur Fallzeit (t) verhielt. Nach dieser Auseinandersetzung wird folgende Tabelle verständlich sein:

Vers.	$log . d\, t$	$log\, Tg \left(\frac{g}{k}\, t\right)$	$log\, P$	$log . d\, s$	$\frac{d\, \delta'}{d\, t}$	$\frac{d\, \delta'}{d\, s}$
1	8,07918.12	9,82260.92	1,13759.14	9,50348.28	0,028639	— 0,015678
2	7,92941.89	9,85032.85	1,20568.07	9,34970.89	0,018171	— 0,010110
3	7,94612.46	9,80317.26	1,09124.13	9,37273.50	0,025743	— 0,013959
4	8,17123.87	9,97640.84	1,59574.86	9,53865.64	0,007156	— 0,004763
5	8,00717.85	9,98517,64	1,64130.25	9,36077.62	0,003886	— 0,002685.

Die vorstehende Tabelle giebt mir zu folgenden Bemerkungen Veranlassung:

1) Die von Herrn Reich angegebenen wahrscheinlichen Fehler in Beziehung auf die Fallzeit und denselben proportionirte Fehler in Bezug auf den Fallraum haben auf die erste Decimalstelle des Werthes von δ' keinen Einfluss.

2) Der Einfluss der Fehler der ersten Art auf den Widerstandscoefficienten δ' ist ungefähr doppelt so gross, als der Einfluss entsprechender Fehler der zweiten Art auf denselben.

3) Obgleich die Fehler in der Zeitbestimmuug bei den Versuchen mit den leichtern Elfenbeinkugeln im Durchschnitt grösser angenommen sind, als bei den Versuchen mit den schwerern metallenen Kugeln, so haben sie doch dort einen geringern Einfluss auf δ' als hier bei den metallenen Kugeln.

4) Reich's Bleikugeln waren kleiner als Benzenberg's Bleikugeln und fielen ausserdem durch einen grössern Raum, beides Gründe, weshalb selbst unter Voraussetzung von gleicher Güte der beiderseitigen Beobachtungen der Widerstand dort deutlicher und schärfer sich herausstellen musste als bei Benzenberg.

§ 84.

Fassen wir nun die gewonnenen Resultate zusammen, so haben wir aus den Fallversuchen Newton's $\delta' = 0{,}51175$,
aus denen Reich's . . $\delta' = 0{,}63728$.

Wegen Benzenberg ist man in einiger Verlegenheit; will man allen seinen Beobachtungen ein gleiches Stimmrecht beilegen, so wäre mit Zugrundelegung von $r_{,}$, wie aus § 79 zu ersehen ist, nach ihm $\delta' = 0{,}97688$ und wir hätten dann als arithmetisches Mittel von den drei Angaben, welche sich auf die Versuche Newton's, Benzenberg's und Reich's beziehen, $\delta' = 0{,}70864$ anzuführen. Ich meine aber, wir nehmen für Benzenberg wegen der oben mitgetheilten Gründe denjenigen Werth für δ' aus § 80, welcher bloss aus seinem 3, 4 und 5ten Versuch für $r,$ hervorgegangen ist, nämlich $\delta' = 0{,}63191$. Dann ergiebt das arithmetische Mittel nach den Fallversuchen der drei genannten Gelehrten den Widerstandscoefficienten

$$\delta' = 0{,}59365.$$

Aus meinen frühern Rechnungen habe ich, wie in § 42 erwähnt ist, für Newton's Pendelsversuche $\delta' = 0{,}77482$ und für einige Pendelversuche Bessels
$\delta' = 0{,}67778$ abgeleitet, danach wäre für Pendelversuche im Durchschnitt . . $\delta' = 0{,}72630$.

Nimmt man schliesslich noch das Mittel von den beiden Angaben, welche aus meinen Berechnungen von Pendel- und Fallversuchen hervorgegangen sind, so hat man als Endresultat $\delta' = \mathbf{0{,}65997}$,
ein Resultat, welches mit der in § 42 erwähnten Angabe Lombard's und Borda's, wonach $\delta' = 0{,}6$ ist, ziemlich gut übereinstimmt.

Es bleibt also dabei, wie schon pag. 34 hervorgehoben wurde, dass nicht Newton's Theorie, wie Poisson und Littrow behaupten, den Widerstand grösser angiebt als die Erfahrung, sondern dass im Gegentheil die Versuche denselben ungefähr im Verhältniss 6 : 5 grösser ergeben als jene Theorie.

Der nächste Schritt, der jetzt zu thun sein möchte, um durch Fallversuche das Gesetz des Widerstandes vollständiger zu erforschen, als es auf den voranstehenden Blättern geschehen ist, möchte der sein, dass man, wie schon pag. 33 angedeutet wurde, den Widerstand nicht bloss dem Quadrat der Geschwindigkeit, sondern ausserdem noch der ersten Potenz derselben proportional setzt. Da dann $\psi = \frac{3}{8}\frac{g'D'}{D.r}\varphi\left(\frac{v}{g'}\right) = \frac{3}{8}\frac{g'D'}{D.r}\delta.v + \frac{3}{8}\frac{D'}{D.r}\delta'.v^2$ ist, so wird man von der Differentialgleichung

$$\frac{dv}{dt} = g - \varepsilon v - \eta v^2$$

auszugehen haben, wo $\varepsilon = \frac{3}{8}\frac{D'}{D.r}.g'\delta = \frac{g'}{F}\delta$

$$\text{und } \eta = \frac{3}{8}\frac{D'}{D.r}\delta' = \frac{1}{F}\delta' \text{ ist,}$$

und wo δ und δ' die nun zu bestimmenden Widerstandscoefficienten sind.

Setzt man noch $\sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \eta g} = R$ und $\frac{\varepsilon}{2R} = Tg\,\varphi$, so wird man auf folgende zwei Gleichungen kommen:

$$\text{I)}\quad v = \frac{g.Tg\,Rt}{R + \frac{\varepsilon}{2}Tg\,Rt},$$

$$\text{II)}\quad \eta s = Log\left[\frac{Cos\,(Rt + \varphi)}{Cos\,\varphi}\right] - \frac{\varepsilon}{2}t,$$

welche den Zusammenhang zwischen Zeit (t), Raum (s) und Geschwindigkeit (v) darlegen.

Es versteht sich von selbst, dass, wenn man bei der Berechnung obiger Fallversuche die letzte Gleichung (II) zum Grunde legen wird, man δ' etwas kleiner finden wird, als ich angegeben habe, da ein Theil davon auf δ kommen muss. Sollten aber auch dann noch die Resultate aus den verschiedenen Beobachtungen mehr von einander abweichen, als man auf Rechnung von Beobachtungsfehlern glaubt schreiben zu können, dann, aber auch erst dann scheint es mir angemessen, noch die dritte Potenz der Geschwindigkeit nach dem Vorgange Piobert's (Lois de la résistance de l'air sur les projectiles, 1857, pag. 21. Par Js. Didion) in den Bereich der Untersuchung zu ziehen.

Nachschrift.

Wenn einerseits noch immer die hyperbolischen Functionen ignorirt werden, wie z. B. von Herrn Dr. Strauch in Muri, Praktische Anwendungen für die Integrationen der Differentialgleichungen, 1865, pag. 256, wo derselbe bei einer und derselben Differentialgleichung auf

$$\frac{3}{\sqrt{1-8g^2}}\, Log\, \frac{4gu-(1+\sqrt{1-8g^2})}{4gu+(1-\sqrt{1-8g^2})} \text{ oder auf } \frac{6}{\sqrt{8g^2-1}}\, arc.tg\, \frac{4gu-1}{\sqrt{8g^2-1}}$$

kommt, je nachdem $1 \gtrless 8g^2$ ist, so ist es auf der andern Seite besonders erfreulich, dass Herr Prof. Dr. Heis in seiner schon pag. 31 erwähnten neuen Auflage der weitverbreiteten Sohncke'schen „Sammlung etc." den hyperbolischen Functionen ein Capitel gewidmet hat. Doch sei es mir gestattet, dazu einige flüchtige Bemerkungen zu machen.

1) Im 2. Theil der „Sammlung" pag. 5 macht Herr Heis einen Fehler, den ich auch einmal, pag. 16, begangen, aber pag. 80 corrigirt habe; er sagt nämlich, es sei

$$\int\frac{dx}{1-x^2} = Ar.Tg\,x \text{ und auch } = Ar.Cotg\,x,$$

während aus § 8, Nr. 3 und Nr. 4 meiner Abhandlung folgt, dass $\int\frac{dx}{1-x^2}$ nur $= Ar\,Tg\,x$ und dass $Ar.Cotg\,x = \int -\frac{dx}{x^2-1}$ ist.

2) Auf Seite 24 sagt H. Heis, dass

$$y = \int\frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}} = \sqrt{C}.Ar.Sin\frac{2Cx+B}{\sqrt{4AC-B^2}} = \sqrt{C}.Ar.$$

sei, während nach § 19 meiner Schrift $y = \frac{Ar.}{\sqrt{C}}$ ist.

3) Auf Seite 87 findet H. Heis in Nr. ζ für $\int\frac{dx}{Cos\,x}$ folgenden unpraktischen und wegen des darin vorkommenden $i = \sqrt{-1}$ abschreckenden Ausdruck:

$$\int\frac{dx}{Cos\,x} = -i\,Log\,\frac{1+i\,Sin\,x}{Cos\,x},$$

während ich in § 8, Nr. 8 angegeben habe: $\int\frac{dx}{Cos\,x} = \omega$, gleich der der hyperbolischen Arc x entsprechenden cyklischen Arc.

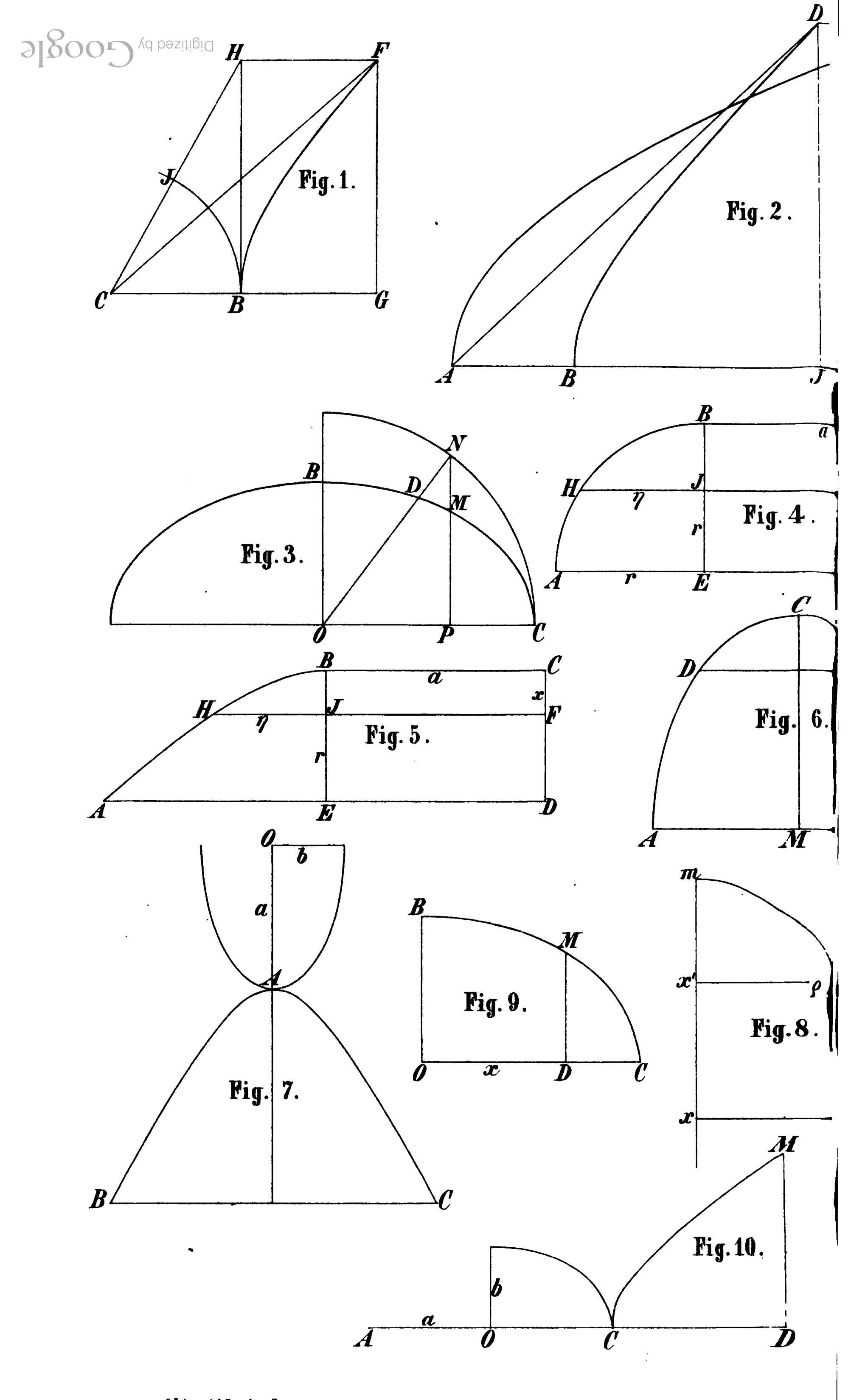
4) In der nächsten Auflage der „Sammlung" werden solche Ausdrücke, wie sie pag. 103 und pag. 107 für ξ und η vorkommen, gewiss durch andre ersetzt sein, die noch geschmeidiger sind, als meine analogen Formeln in § 40 und § 41.

Druckfehler in den Tafeln von 1863.

Seite III, Zeile 10 von unten: statt $i\,tg\,i\,u$ lies — $i\,tg\,i\,u$.
Seite 5, unten: statt 0° lies 89°.
Seite 48 muss in der vorletzten Spalte das Wort: Diff. von oben nach u
setzt werden.

Druckfehler und Verbesserungen in der Abhandlung.

Seite 6, Zeile 10 von unten statt $45^0 + \frac{w}{z}$ lies $45^0 + \frac{w}{2}$.
Seite 13, Zeile 7 statt 13 lies 113.
Seite 16, Zeile 1 fehlt Ar vor $Cotg\ (\sqrt{2}\ Cos\ x)$.
Seite 16, die Zeilen 2 und 3 sind zu streichen, da stets $\sqrt{2}\ Cos\ x > 1$ und T
Seite 16, Zeile 13 von unten statt Bjorling lies Björling.
Seite 31, Zeile 17 von unten statt CD lies OD.
Seite 32, § 41 fehlt am Rande: Fig. 10.
Seite 41, Zeile 14 von oben und Zeile 1 von unten ist das Zeichen für Me
eine falsche Stelle gesetzt.
Seite 47, Zeile 8 von unten statt $\frac{g}{k} = \vartheta$ bis $\frac{g}{k}\,\vartheta =$.
Seite 52, Zeile 17 von unten ist beidemal $\tau,$ statt τ' zu lesen.
Seite 53, Zeile 10 von unten statt seine lies die folgenden.
Seite 56, Zeile 5 statt wobei lies in der.
Seite 56, Zeile 12 statt 1.8... lies 1,8...
Seite 59, Zeile 8 statt 4½ lies 4¼.
Seite 63, Zeile 14 statt | lies [.
Seite 63, Zeile 2 von unten statt der δ' lies erhaltenen δ'. Die dann
Worte: „bei etwas verschiedenen g'“ können als selbstverständlich
werden.
Seite 64, Zeile 10 von unten: Nach dem Worte angenommen könnte no
gefügt werden: was etwa 10° Temperatur voraussetzt.



Lith. Anst. v. A. de Payrebrune Danzig.

